Предисловие

Посвящается светлой памяти выдающегося русского математика академика А.Н. Колмогорова.

В данном третьем томе задачника представлены задачи по оптимальной фильтрации и экстраполяции (предсказанию) случайных процессов. В гл. 1 рассмотрены задачи по основам оптимальной фильтрации с использованием байесовских критиериев. Далее в гл. 2 и 3 даются задачи на согласованную фильтрацию и фильтрацию по критерию максимума отношения сигнал/шум (ОСШ) в общем виде. В гл. 2 рассматриваются непрерывные, а в гл. 3 — цифровые фильтры.

В гл. 4–6 даются задачи по фильтру Винера: непрерывный — в гл. 4, цифровой рекурсивный (БИХ-фильтр) — в гл. 5, цифровой нерекурсивный (КИХ-фильтр) — в гл. 6.

В гл. 7–10 приводятся задачи на синтез непрерывного фильтра Калмана (гл. 7 — скалярный и гл. 8 — векторно-матричный) и цифрового фильтра Калмана (гл. 9 — скалярный, гл. 10 — многомерный).

В гл. 11 даны задачи на применение оптимизационных методов оценки энергетического спектра случайного процесса; в гл. 12 — задачи на линейное предсказание; в гл. 13 — задачи на использование методов линейной адаптивной фильтрации; в гл. 14 — задачи по нелинейной оптимальной фильтрации; в гл. 15 — задачи на использование расширенного фильтра Калмана; в гл. 16 — задачи по моделированию процессов.

В приложениях приводятся правила векторного дифференцирования (приложение 1), порядок расчета цифрового оптимального фильтра по критерию максимума ОСШ (приложение 2), алгоритм Левинсона–Дурбина с примером решения уравнения Винера–Хопфа (приложение 3), решение матричного уравнения Риккати (приложение 4), решение интегральных уравнений (приложение 5). В приложении 6 приводятся основы декомпозиционных методов спектрального оценивания, в приложении 7 рассматривается моделирование случайных процессов при известных отсчетах КФ, включая использование дискретного преобразования Карунена–Лоэва (ДПКЛ), в приложении 8 даны аппроксимация Паде и метод Прони, в приложении 9 дано представление фильтра ошибки предсказания (ФОП) в виде решетчатой реализации, в приложении 10 рассмотрен энергетический спектр узкополосного дискретного случайного процесса.

В данном томе рассматриваются как скалярные, так и многомерные, как непрерывные, так и дискретные (цифровые) случайные процессы и системы.

Структура материала та же, что и в двух предыдущих томах. Сначала приводяься краткие теоретические сведения по теме задач, затем идут примеры и далее — условия задач, как правило, сопровождаемых ответами.

Следует отметить, что этот том, как и два предыдущих, может быть использован независимо от других томов задачника.

Темы данного тома задачника отражены в ряде учебных пособий [1–20] и задачников [21–27], однако в предлагаемых объемах и набора задач данный сборник, по мнению авторов, выходит впервые.

Авторы надеются, что данный том, как и первые два, послужит целям обучения студентов и будет пособием для инженеров-разработчиков, занимающихся синтезом оптимальных систем.

Авторы благодарят члена-корреспондента РАН И.Б. Федорова, лауреата Ленинской премии Б.И. Чиркова и доцента А.К. Ковальчука за поддержку издания этого тома, рецензентов профессора Н.Н. Удалова и профессора В.С. Уварова за доброжелательную рецензию на данный том задачника, а также аспирантов Ю.А. Сидоркину, Д.А. Святного и студентов К.С. Денисову и И.О. Малахова за участие в наборе данного тома.

Особая благодарность Ю.Н. Чернышову за редактирование и верстку данного третьего тома, как и двух предыдущих.

Глава 1

Оптимальное оценивание по критерию Байеса

Теоретические сведения

В основе многих процедур оптимальной фильтрации лежит известный в математической статистике критерий Байеса. Он применим к решению как задач обнаружения и распознавания сигналов (см. том 1 задачника), так и для получения статистических оценок параметров сигналов.

В статистике часто ставится задача оценить значения неизвестных (не наблюдаемых) случайных или детерминированных параметров распределения случайной величины X по ряду наблюдаемых значений, которые приняла случайная величина Y, статистически связанная с СВ X.

В теории обработки сигналов эта задача выглядит следующим образом. На фоне шумов принимается сигнал с неизвестными параметрами, которые и надо оценить.

Пример 1. Полезный сигнал $s(t, \theta)$ зависит от скалярного параметра θ. Наблюдению доступен сигнал $x(t) = s(t, \theta) + n(t)$, где $n(t)$ — гауссовский шум. Требуется найти оценку $\hat{\theta}$ параметра θ.

Задачу оценивания можно рассматривать как частный случай задачи принятия решений. Для постановки задачи необходимо определить некоторые множества и отображения.

1. Задать множество Θ параметров природы (анализируемые сигналы, данные и т.д. называют одним словом «природа»), состоящее из всевозможных состояний объекта наблюдения. Из этих состояний реализуется на практике только одно, которое неизвестно лицу, принимающему решение, в момент принятия решения. На множестве Θ задать распределение вероятностей, то есть определить СВ θ.

В примере 1 СВ θ является случайным параметром сигнала.

2. Задать случайную величину X, которую охарактеризовать условной плотностью распределения вероятностей (ПРВ) $W_{X|\theta}(x \mid \vartheta)$ (или условным распределением вероятностей).

В примере 1 распределение СВ X является гауссовским с математическим ожиданием $s(t, \vartheta)$ и остальными параметрами, совпадающими с распределением вероятности шума $n(t)$.

3. Задать множество A, называемое *пространством действий*, которое состоит из всех действий, доступных лицу, принимающему решение.

Для примера 1 в пространство действий включаются элементы $a_{\hat{\theta}}$, которые интерпретируются следующим образом: $a_{\hat{\theta}} \equiv$ «принимается решение о том, что значение неизвестного параметра сигнала θ равно $\hat{\theta}$».

Таким образом, действие $a_{\hat{\theta}}$ можно отождествить с оценкой $\hat{\theta}$, а пространство действий A с областью значений оценок $\hat{\Theta}$: $a_{\hat{\theta}} = \hat{\theta}$.

4. Задать функцию L, называемую функцией потерь, с областью определения $\Theta \times A$ и областью значений $\mathbb{R}$. То есть каждой паре (θ, a), где $\theta \in \Theta$, $a \in A$, состоящей из состояния природы выбранного действия, сопоставляется действительное число $L(\theta, a)$, называемое потерями (последствиями) от принятия решения a. Обычно $L(\theta, a)$ — неотрицательная функция.

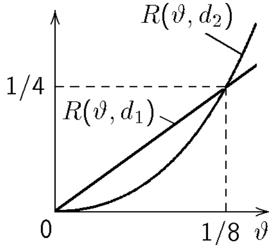

Рис. 1.1

В примере 1 в качестве функции $L(\theta, a_{\hat{\theta}}) = L(\theta, \hat{\theta})$ можно выбрать $L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$ — квадратичную функцию потерь. При совпадении значения ϑ, которое приняла СВ θ (истинного значения параметра), с оценкой $\hat{\theta}$ потери от принятия такого решения равны нулю (отсутствуют).

5. Задать множество D, называемое пространством решений, и состоящее из всех отображений d (заданного класса) множества значений СВ X в пространство действий (в множество значений оцениваемых параметров) A. Элементы D называют решениями.

В примере 1 пространство действий можно отождествить с множеством функций $\hat{\theta}(X)$.

Назовем функцией риска от принятия решения d при состоянии природы ϑ условное математическое ожидание функции потерь

$$R(\vartheta, d) = E\{L(\theta, X) \mid \theta = \vartheta\} = \int_{\Omega_X} L(\vartheta, d(x)) W_{X|\theta}(x \mid \vartheta)\, dx. \tag{1.1}$$

Пример 2. Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — выборка из генеральной совокупности независимых нормально распределенных величин с математическим ожиданием θ и дисперсией θ. Выберем квадратичную функцию потерь $L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$ для оценивания параметра θ. Рассмотрим две решающие функции:

$$d_1(\mathbf{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{m};$$

$$d_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{m})^2.$$

Проводя вычисления по формуле (1.1), находим:

$$R(\vartheta, d_1) = \vartheta/n; \qquad R(\vartheta, d_2) = 2\vartheta^2/(n-1). \tag{1.2}$$

Заметим, что $R(\vartheta, d_1(\mathbf{X})) = R(\vartheta, d_2(\mathbf{X}))$ при $\vartheta = (n-1)/2n$. При этом $R(\vartheta, d_1(\mathbf{X})) > R(\vartheta, d_2(\mathbf{X}))$ при $\vartheta < (n-1)/2n$ и $R(\vartheta, d_1(\mathbf{X})) < R(\vartheta, d_2(\mathbf{X}))$ при $\vartheta > (n-1)/2n$. Функции риска при $n = 2$ изображены на рис. 1.1.

Таким образом, если известно, что $\vartheta < (n-1)/2n$, то лучше пользоваться решающим правилом $d_2(\mathbf{X})$, если же $\vartheta > (n-1)/2n$ то лучше пользоваться решающим правилом $d_1(\mathbf{X})$.

Рассмотренный пример показывает, что существует множество решающих функций. Одним из подходов к выбору одной из них, является использование критерия Байеса.

Критерий Байеса. Пусть $W_\theta(\vartheta)$ — ПРВ случайной величины θ. Тогда оптимальное решающее правило $d^*(\mathbf{X})$ выбирается из условия минимума байесовского риска

$$r(d) = \int_{\Omega_\theta} R(\vartheta, d(\mathbf{X})) W_\theta(\vartheta)\, d\theta, \tag{1.3}$$

то есть,

$$r(d*) = \min_{d \in D} r(d).$$

Справедливо следующее утверждение. Байесовская решающая функция d^* для априорного распределения $W_\theta(\vartheta)$ оцениваемого параметра задается равенством

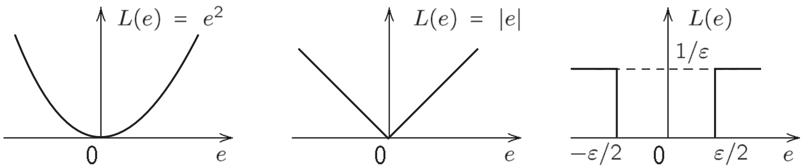

Рис. 1.2

$d^*(\mathbf{X}) = a^*$, где $a^* \in A$ ищется из условия минимизации апостериорного риска

$$r_{\text{ap}}(a^*) = \min_{a\in A} r_{\text{ap}}(a) = \min_{a\in A} \int_{\Omega_\theta} L(\vartheta, a) W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})\, d\vartheta \tag{1.4}$$

при фиксированном наблюдении $\mathbf{x}$.

В формуле (1.4) ПРВ $W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})$ является апостериорной вероятностью неизвестных параметров, а по условию задачи известна априорная ПРВ наблюдения при фиксированном значении $\theta = \vartheta$: $W_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x} \mid \vartheta)$. Поэтому выразим $W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})$ через $W_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x} \mid \vartheta)$. Для этого воспользуемся определением условной ПРВ

$$W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x}) = \frac{W_{\mathbf{X}\theta}(\mathbf{x}, \vartheta)}{W_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} = \frac{W_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x} \mid \vartheta) W_\theta(\vartheta)}{W_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}.$$

Поскольку $W_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ не зависит от действия a^* (оценки $\hat{\theta}$), то задача на поиск минимума (1.4) эквивалентна задаче

$$\rho_{\text{ap}}(a^*) = \min_{a\in A} \rho_{\text{ap}}(a) = \min_{a\in A} \int_{\Omega_\theta} L(\vartheta, a) W_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x} \mid \vartheta) W_\theta(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{1.5}$$

На практике наиболее часто употребляются три функции потерь: квадратичная, модульная и простая (рис. 1.2).

Квадратичная функция потерь $L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$ (см. рис. 1.2,*а*). Для этой функции потерь

$$r_{\text{ap}}(\hat{\theta}) = \min_{\hat{\theta}\in\mathbf{\Omega}_\theta} \int_{\Omega_\theta} (\vartheta - \hat{\theta})^2 W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})\, d\vartheta.$$

Найдем минимум функции $r_{\text{ap}}(\hat{\theta})$. Стационарная точка этой функции ищется из условия равенства нулю первой производной:

$$\frac{dr_{\text{ap}}}{d\hat{\theta}} = -2 \int_{\Omega_\theta} (\vartheta - \hat{\theta}) W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})\, d\vartheta =$$

$$= -2 \left\{ \int_{\Omega_\theta} \vartheta W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})\, d\vartheta - \hat{\theta} \int_{\Omega_\theta} W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})\, d\vartheta \right\} =$$

$$= -2 \left\{ \int_{\Omega_\theta} \vartheta W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})\, d\vartheta - \hat{\theta} \right\}.$$

Откуда

$$\hat{\theta} = \int_{\Omega_\theta} \vartheta W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})\, d\vartheta. \tag{1.6}$$

Эта стационарная точка является точкой минимума, поскольку $d^2 r_{\text{ap}}/d\hat{\theta}^2 = 2 > 0$.

Таким образом, использование квадратичной функции потерь приводит к оценке условного (апостериорного) среднего.

Модульная функция потерь $L(\theta, \vartheta) = |\theta - \vartheta|$ (см. рис. 1.2,*б*).
В этом случае выражение для апостериорного риска (1.4) принимает вид

$$r_{\text{ap}}(\hat{\theta}) = \int_{\Omega_\theta} |\vartheta - \hat{\theta}| W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})\, d\vartheta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \vartheta) W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})\, d\vartheta + \int_{\hat{\theta}}^{\infty} (\vartheta - \hat{\theta}) W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})\, d\vartheta.$$

Найдем минимум апостериорного риска. Допустим, что апостериорный риск принимает минимальное значение по переменной $\hat{\theta}$ во внутренней точке носителя подынтегральной функции. Воспользуемся правилом дифференцирования интегралов с переменным верхним (нижним) пределом. Тогда

$$\frac{dr_{\text{ap}}}{d\hat{\theta}} = \int_{m_1}^{\hat{\theta}} W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})\, d\vartheta + (\hat{\theta} - \hat{\theta}) W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x}) -$$

$$- \int_{\hat{\theta}}^{\infty} W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})\, d\vartheta - (\hat{\theta} - \hat{\theta}) W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\hat{\theta}} W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x}), d\vartheta - \int_{\hat{\theta}}^{\infty} W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x}), d\vartheta.$$

Таким образом, искомая байесовская оценка ищется из условия

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}} W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})\, d\vartheta = \int_{\hat{\theta}}^{\infty} W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta \mid \mathbf{x})\, d\vartheta. \tag{1.7}$$

Аналогичную формулу можно получить рассматривая нормированный риск (1.5):

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}} W_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x} \mid \vartheta) W_\theta(\vartheta))\, d\vartheta = \int_{\hat{\theta}}^{\infty} W_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x} \mid \vartheta) W_\theta(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{1.8}$$

Оценка, полученная из формулы (1.7), является медианой апостериорного распределения.

Простая функция потерь (см. рис. 1.2,*в*)

$$L(\theta, \hat{\theta}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \hat{\theta} \in [-\varepsilon, \varepsilon]; \\ 1/\varepsilon & \text{при } \hat{\theta} \notin [-\varepsilon, \varepsilon]. \end{cases}$$

По формуле (1.4) апостериорный риск

$$r_{\text{ap}}(\hat{\theta}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta|\mathbf{x})\, d\vartheta - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\hat{\theta}-\varepsilon}^{\hat{\theta}+\varepsilon} W_{\theta|\mathbf{X}}(\vartheta|\mathbf{x})\, d\vartheta.$$

Вычислим производную

$$\frac{dr_{\text{ap}}}{d\hat{\theta}} = -\frac{1}{\varepsilon}[W_{\theta|\mathbf{X}}(\hat{\theta} + \varepsilon \mid \mathbf{x}) - W_{\theta|\mathbf{X}}(\hat{\theta} - \varepsilon \mid \mathbf{x})].$$

Следовательно, при простой функции потерь оценку $\hat{\theta}$ ищут из условия

$$-\frac{1}{\varepsilon}[W_{\theta|\mathbf{X}}(\hat{\theta} + \varepsilon \mid \mathbf{x}) - W_{\theta|\mathbf{X}}(\hat{\theta} - \varepsilon \mid \mathbf{x})] = 0, \tag{1.9}$$

или

$$W_{\theta|\mathbf{X}}(\hat{\theta} + \varepsilon \mid \mathbf{x}) = W_{\theta|\mathbf{X}}(\hat{\theta} - \varepsilon \mid \mathbf{x})].$$

При гладкой функции потерь наиболее часто используют оценку, получающуюся при $\varepsilon \to 0$:

$$\frac{dW_{\theta|\mathbf{X}}(\hat{\theta} \mid \mathbf{x})}{d\hat{\theta}} = 0. \tag{1.10}$$

Эту оценку называют оценкой максимума апостериорной ПРВ.

С использованием апостериорной ПРВ оценку максимума апостериорной ПРВ можно записать в виде

$$\frac{d}{d\hat{\theta}}[W_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x} \mid \hat{\theta} \mid \mathbf{x})W_{\theta}(\hat{\theta})] = 0. \tag{1.11}$$

Если $W_{\theta}(\vartheta)$ — равномерное распределение, то оценку ищут из условия

$$\frac{dW_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x} \mid \hat{\theta})}{d\hat{\theta}} = 0. \tag{1.12}$$

Эту оценку называют оценкой максимального правдоподобия, а функцию $W_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x} \mid \hat{\theta})$ — функцией правдоподобия.

Функционал распределения вероятности белого гауссовского шума. Для оценки параметров аналоговых сигналов во всех вышеприведенных формулах вместо многомерных плотностей вероятностей отсчетов наблюдаемого сигнала используют функционалы [1]. Функционал распределения белого гауссовского шума $n(t)$ с энергетическим спектром $S_n(\omega) = N_0/2$, определенного на отрезке времени $[0; T]$, имеет вид

$$P_n(\mathbf{x}) = \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)\,dt\right\}. \tag{1.13}$$

Неравенство Крамера-Рао. Пусть $\hat{\theta}$ — несмещенная оценка неизвестного случайного параметра θ, построенная по наблюдениям $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ СВ X. Тогда

$$E\{(\hat{\theta} - \theta)^2 | \theta = \vartheta\} \geqslant \frac{1}{nI(\vartheta)}, \tag{1.14}$$

где

$$I(\vartheta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln W_{X|\theta}(x \mid \vartheta)}{\partial \vartheta}\right]^2 \middle| \theta = \vartheta\right\} = \int_{\Omega_X}\left[\frac{\partial \ln W_{X|\theta}(x \mid \vartheta)}{\partial \vartheta}\right]^2 W_{X|\theta}(x \mid \vartheta)\,dx$$

— информация по Фишеру.

Эффективностью несмещенной оценки $\hat{\theta}$ называют величину

$$e(\vartheta) = \frac{1}{nI(\vartheta)E\{(\hat{\theta} - \theta)^2 | \theta = \vartheta\}}.$$

Если $e(\vartheta) = 1$, то оценка является эффективной. При эффективной оценке неравенство Крамера-Рао обращается в равенство.

В том случае, когда имеется несколько оцениваемых параметров для получения нижней границы для дисперсий оценок используют информационную матрицу Фишера $\mathbf{J}$, элементами которой являются значения

$$J_{ij} = -E\left\{\frac{\partial^2 W_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x} \mid \vartheta)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j}\right\}.$$

Если $\mathbf{R} = E\{(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^{\mathsf{T}}\}$ — матрица дисперсий ошибок оценивания, то неравенство Крамера-Рао в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{R} \geqslant \mathbf{J}^{-1}. \tag{1.15}$$

Энергетические и неэнергетические информационные параметры сигнала. Пусть полезный сигнал $s(t;\theta)$ зависит от параметра θ, подлежащего оценке. Обозначим через

$$Э = \int_0^T s^2(t;\theta)\,dt$$

энергию сигнала.

Назовем параметр θ энергетическим параметром, если энергия сигнала $Э$ является функцией θ. В противном случае назовем параметр неэнергетическим.

Примеры

1.1. Доказать формулу (1.4).

Решение. Преобразуем выражение для байесовского риска с учетом формулы, вытекающей из определения условной ПРВ

$$W_{X|\theta}(x \mid \vartheta)W_\theta(\vartheta) = W_{\theta|X}(\vartheta \mid x)W_X(x).$$

Получим

$$\begin{aligned} r(d) &= \int_{\Omega_\theta}\left[\int_{\Omega_X} L(\vartheta, d(x))W_{X|\theta}(x \mid \vartheta)\,dx\right]W_\theta(\vartheta)\,d\vartheta = \\ &= \int_{\Omega_\theta}\left[\int_{\Omega_X} L(\vartheta, d(x))W_{\theta|X}(\vartheta \mid x)W_X(x)\,dx\right]d\vartheta = \\ &= \int_{\Omega_X}\left[\int_{\Omega_\theta} L(\vartheta, d(x))W_{\theta|X}(\vartheta \mid x)\,d\theta\right]W_X(x)\,dx. \end{aligned} \qquad (1.16)$$

Учитывая, что $W_X(x)$ фиксированная неотрицательная функция переменной x, интеграл принимает минимальное значение в том случае, когда выражение в квадратных скобках (1.16) минимально, т.е. когда при фиксированном значении x отображение $d(x)$ выбирается так, что

$$\min_{d\in D}\int_{\Omega_\theta} L(\vartheta, d(x))W_{\theta|X}(\vartheta \mid x)\,d\vartheta. \qquad (1.17)$$

Поскольку в (1.17) значение x фиксировано и равно наблюдаемому значению, то при этом значении x $d(x) = a^* = \hat\theta$ и

$$r_{\text{ap}}(\hat\theta) = \min_{\hat\theta\in A}\int_{\Omega_\theta} L(\vartheta, \hat\theta)W_{\theta|X}(\vartheta \mid x)\,d\vartheta.$$

То есть оптимальную оценку $\hat\theta = a^* = d(x)$ находят из условия минимума апостериорного риска.

1.2. Найти оценку неизвестного математического ожидания гауссовской СВ X по n независимым наблюдениям ее значений с использованием квадратичной функции потерь. Дисперсию СВ X считать известной. Распределение математического ожидания принять равномерным в отрезке $[m_1, m_2]$. Рассмотреть предельные случаи: а) $m_1 \to -\infty$, $m_2 \to \infty$; б) $n \to \infty$.

Решение. ПРВ одного наблюдения является нормальной с неизвестным параметром θ:

$$W_{X|\theta}(x \mid \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{(x-\vartheta)^2/2\sigma^2}.$$

Совместная ПРВ совокупности из n независимых СВ имеет вид

$$W_{\mathbf{X}|\theta}(\mathbf{x} \mid \vartheta) = \prod_{k=1}^{n} W_{X|\theta}(x_k \mid \theta) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sigma^n} \prod_{k=1}^{n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_k-\vartheta)^2\right] =$$
$$= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sigma^n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\vartheta)^2\right],$$

где $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Поскольку параметр θ равномерно распределен в отрезке $[m_1, m_2]$, то

$$W_\theta(\vartheta) = \begin{cases} 1/(m_2-m_1) & \text{при } \vartheta \in [m_1, m_2]; \\ 0 & \text{при других } \vartheta. \end{cases}$$

Тогда по формуле (1.6)

$$\hat{\theta} = \frac{(m_2-m_1)^{-1}\displaystyle\int_{m_1}^{m_2} \vartheta (2\pi)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\vartheta)^2\right] d\vartheta}{(m_2-m_1)^{-1}\displaystyle\int_{m_1}^{m_2} (2\pi)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\vartheta)^2\right] d\vartheta.}$$

Учтем, что

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-\vartheta)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\vartheta\sum_{k=1}^{n} x_k + \vartheta^2 n =$$
$$= n\left[\vartheta^2 - 2\vartheta\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right] =$$
$$= n\left(\vartheta - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2.$$

В этом случае

$$I_1 = \int_{m_1}^{m_2} \vartheta \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\vartheta)^2\right\} d\vartheta =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2\right]\right\} \times$$