Предисловие автора ко второму изданию

Посвящается памяти большого ученого и педагога, учителя и друга Василия Ивановича Тихонова

Интерес к системам синхронизации остается по-прежнему значительный. И это не только в теоретическом, но и в практическом отношении. Интерес этот обусловлен, в частности, появлением новых систем связи, таких как OFDM, радионавигации (GPS, ГЛОНАСС и др.), эффективность которых существенно зависит от обеспечения помехозащищенности систем синхронизации.

В связи с отмеченным интересом к системам синхронизации автор решил переиздать свою ранее опубликованную монографию, предварительно несколько расширив ее за счет своих новых опубликованных работ и, таким образом, обновив текст первого издания.

Профессор В.И. Тихонов (1922–2006 гг.) создал школу в области радиотехники: это не только системы синхронизации, а в более широком смысле теория нелинейных систем, включая нелинейные системы при случайных воздействиях. Его ранние работы в этой области были переведены за рубежом (Kuznetzov P.I., Stratonovich R.L., Tihonov V.I. Non Linear Tranformation of Stohastic Processes. — London: Pergamon Press, 1965). Многое сделано В.И. Тихоновым в области нелинейной оптимальной фильтрации. По его книгам учились и учится до сих пор не одно поколение наших ученых, а также студентов и аспирантов.

Автору повезло начинать свою работу в области теории синхронизации под руководством профессора В.И. Тихонова. И даже через 10 лет после его ухода мое чувство благодарности за его поддержку и внимание к работе останется навсегда.

Все свои достижения в научной работе автор считает развитием направления школы профессора В.И. Тихонова. Данная монография не является исключением, и недаром предисловие к ее первому изданию написано именно профессором В.И. Тихоновым.

Дополнительно в новом издании сделано следующее:

1) обновлена глава 3 за счет включения разделов:

- математическое моделирование срывов слежения;
- вероятность срыва слежения в системе первого порядка;

- срыв слежения в системе второго порядка;

2) в главе 7 добавлен раздел с новой версией метода усреднения;

3) обновлена глава 8 за счет формулы Холмса и энергетических спектров фазовой ошибки;

4) добавлена глава 9 «Систез оптимальных систем синхронизации на основе метода нелинейной оптимальной фильтрации», что является ответом на критику профессора В.И. Тихонова (см. последний абзац его предисловия);

5) добавлена глава 10 «Синтез квазиоптимальных систем фазовой автоподстройки частоты»; данная глава, по просьбе автора, подготовлена его учеником А.А. Самохваловым.

Автор благодарен д.т.н. В.В. Сизых за многолетнее сотрудничество и внимание к работам автора.

Редактором книги Ю.Н. Чернышовым проделана большая работа по переработке книги, которая, наконец, приобрела электронный вид. Автор выражает ему искреннюю благодарность.

Автор надеется, что и новое издание книги будет полезной для студентов, аспирантов и инженеров, занимающихся исследованием и проектированием систем синхронизации.

Предисловие

В предлагаемой вниманию читателей книге приведены результаты исследований статистической динамики систем синхронизации — фазовых автоматических систем (ФАС); рассмотрены непрерывные и дискретные нелинейные системы при наличии случайных возмущений.

Примерно к 60-м годам было четко осознано, что наибольшую помехоустойчивость обеспечивает когерентный (квазикогерентный) прием радиосигналов на фоне помех. При этом обязательным элементом квазикогерентных приемных устройств является фазовая автоподстройка (ФАП), формирующая опорное колебание из принятого сигнала. Из-за неизбежных искажений переданного сигнала в канале и наличия помех разность фаз между принятым сигналом и опорным колебанием оказывается случайной. Структура схемы ФАП определяется видом принимаемого сигнала, характером помех и способом их комбинации. Здесь возможно большое число вариантов.

Однако область использования ФАС, подобных ФАП, не ограничивается только квазикогерентным приемом сигналов, а гораздо разнообразнее. Их применяют в ситуациях, где необходимо обеспечить синхронное, согласованное по времени протекание двух или нескольких процессов.

К 60-м годам были известны приближенные решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для непрерывных моделей ФАС при наличии на их входе аддитивной смеси гармонического сигнала и широкополосного шума. С математической точки зрения задача сводилась к поиску методов решения указанных уравнений с учетом счетного числа устойчивых состояний равновесия, специфичных начальных, граничных и других условий, а также выбора аналитических и численно-аналитических методов исследования. Одним из первых еще в 1940 г. аппарат марковских случайных процессов применил Х.А. Крамерс при изучении химических реакций.

К настоящему времени опубликовано достаточно много работ, где рассмотрены различные частные статистические характеристики ФАС (в частности, ФАП). Данная книга систематизирует и обобщает полученные ранее результаты автора, который продолжительное время систематически и продуктивно занимается исследованиями в этой области.

В качестве исходной математической модели в книге приняты нелинейные стохастические дифференциальные и разностные уравнения. Основным математическим аппаратом анализа является теория марковских процессов (в частности, уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, Понтрягина, Колмогорова–Чепмена). Однако в книге использованы и другие математические методы статистического анализа и синтеза, в частности кумулянтный, квазистатический (метод Райса), численный, численно-аналитический методы, а также методы усреднения, Галеркина и статистического моделирования.

В результате анализа систем первого и второго порядков получены основные статистические характеристики: плотности вероятностей фазового рассогласования (не только в стационарном, но и в нестационарных режимах работы), времени до срыва слежения в непрерывных и импульсных фазовых системах и энергетические спектры (в цифровых системах синхронизации).

Автор свободно владеет асимптотическими методами исследования и широко использует их на практике: применяет разложение Лангера для оценки среднего времени до срыва синхронизации и среднего значения частотного рассогласования; различные асимптотические оценки среднего времени до срыва сравнивает со значением величины, обратной частоте пересечения фазовым процессом заданного уровня; асимптотические формулы сопоставляет с точными результатами; при анализе цифровых систем аналитические результаты, полученные на основе полумарковских процессов, сравнивается с данными статистического моделирования этих процессов.

Книга хорошо иллюстрирована. Графическое отображение нашли практически все основные статистические характеристики систем первого и второго порядков при различных характеристиках фазового дискриминатора, а также энергетические спектры в цифровых системах различного принципа действия и структуры.

В книге не отражены прикладные аспекты ФАС и нелинейный синтез фазовых систем. Однако необходимые сведения по этим вопросам читатель может найти в указанной литературе.

Доктор технических наук,
профессор В.И. Тихонов

Предисловие автора к первому изданию

Предлагаемая читателям книга посвящена теории систем синхронизации. В отличие от книг автора, вышедших ранее, где рассмотрены детерминированные системы, в данной книге описаны их стохастические разновидности. Исторически исследование систем началось с непрерывных, которым в книге уделяется основное внимание. Рассматриваются также и дискретные (импульсные и цифровые) системы синхронизации.

Одним из основных методов исследования таких специфически нелинейных систем является метод марковских и полумарковских случайных процессов и цепей, разработанный А.Н. Колмогоровым и Л.С. Понтрягиным. Их уравнения лежат в основе математического аппарата метода. Исследователям еще остается учесть специфику граничных, начальных и других условий решения этих уравнений, а также выбрать методы их аналитического и численно-аналитического решения.

Одним из первых это сделал Х.А. Крамерс* [18], работа которого оказала существенное влияние на дальнейшее исследование нелинейных систем и именем которого названо одно из уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК). Теория собственно стохастических ФАС начала формироваться работами Р.Л. Стратоновича и В.И. Тихонова. Их основные идеи до сих пор далеко не исчерпаны.

После этих работ внимание исследователей было обращено на вычисление плотности распределения вероятностей (ПРВ) сигнала рассогласования и его производной (частоты), а также на их числовые характеристики (среднее и среднеквадратическое значения) при синусоидальной нелинейности фазового детектора (ФД) $g(x) = \sin x$.

Автором была получена ПРВ сигнала ошибки в форме ряда Фурье, справедливого как для $g(x) = \sin x$, так и произвольной (интегрируемой) характеристики ФД. Вначале срыв синхронизации характеризовался частотой срыва и частотой достижения критического фазового уровня (см. работы В.И. Тихонова, К.Б. Челышева, Б.И. Шахтарина [53, 165]), затем — средним времени до срыва, особенно после работ [11, 15], при этом исследователи обратились к ис-

---

* Крамерс Х.А. (Kramers Hendrik Antony) (1894–1952 гг.) — «пионер квантовой механики» [178, 179], лауреат премии Лоренца.

ходной статье Л. Витта, А.А. Андронова, Л.С. Понтрягина [16]. Стали разрабатываться методы решения уравнений Понтрягина. Применительно к системе второго порядка одними из первых были работы Р.Л. Стратоновича и П.С. Ланда [123], Н.Н. Никитина [17], С.В. Первачева [54], Р. Таусворта [57, 177].

Автору удалось получить рекуррентную формулу для определения моментов времени до срыва синхронизации, найти границы для первых четырех моментов и выразить среднее время в форме отрезка рядов Фурье и Тейлора, а также получить асимптотические формулы для оценки среднего времени до срыва синхронизации в системе второго порядка.

Большой вклад в теорию непрерывных систем внес В. Линдсей со своими учениками [22, 73, 81, 87]. В работах Г. Рискена и Г. Волмера [48, 51, 63] рассмотрено уравнение одной из разновидностей ФАС — джозефсоновского перехода, предложена элегантная форма метода Тихонова для получения совместной ПРВ сигнала рассогласования и его производной.

В данной книге рассмотрен как собственно метод Тихонова, так и его модификация Рискена–Волмера. В настоящее время в меньшей степени развиты методы анализа импульсных и особенно цифровых систем синхронизации с учетом схемного многообразия цифровых систем. Состояние работ в этой области отражено в обзоре В. Линдсея и Ч. Цзы [87].

В основе метода исследования импульсных стохастических систем лежит интегральное уравнение Колмогорова–Чепмена и уравнение среднего времени до срыва синхронизации (см. работы Ч. Цзы [149], А. Вайнберга и В. Ли [27], В.И. Битюцкого и П.Н. Сердюкова [26]).

Одной из первых работ, в которой предложен аналитический метод марковских цепей для анализа цифровых систем, является работа Д. Холмса [25]. В данной книге использован метод Д. Холмса, а также метод полумарковских цепей, изложенный в работах М. Накао и К. Ямасита [152].

Наряду со строгими методами исследования стохастических ФАС в книге рассматриваются также и приближенные методы, к которым относятся кумулянтный метод и его частный случай — метод статистической линеаризации, а также метод усреднения, который для анализа ФАС использовался ранее в работах Р.Л. Стратоновича [5, 123], В.В. Шахгильдяна [75], а также Г. Рискена и Г. Волмера [48]. В книге данные метода усреднения сравниваются с результатами численно-аналитического метода.

К настоящему времени разработка методов исследования ФАС и опубликованные результаты достигли такого состояния, когда необходимы их систематизация и обобщение. В книге содержатся как изложение методов исследования ФАС при наличии на ее входе случайных возмущений, так и результаты, получаемые на основе этих методов. В первой части книги анализу дискретных стохастических ФАС посвящены гл. 5, 8, где получены зависимости ПРВ сигнала рассогласования и моменты времени до срыва синхронизации.

При узкополосном шуме на входе ФАС марковская модель сигнала ошибки перестает отражать свойства ФАС как демодулятора частотно-модулированного (ЧМ) колебания. В этом случае шум на выходе ФАС складывается из двух составляющих (модель С.О. Райса [30]) — нормальной (гаусовской) и аномальной (импульсной). Используя эту модель с некоторой модификацией, Д.Т. Хесс [31] рассмотрел воздействие узкополосного шума на систему ФАС первого порядка; в [32] на основе модели Райса получена рабочая характеристика ЧМ приемника с системой ФАС. Определенные обобщения в этом направлении предприняты в [33, 34]. В книге этому вопросу посвящена отдельная глава (см. гл. 6).

Цифровые системы синхронизации различного исполнения анализируются в гл. 8 на базе полумарковских цепей.

Автор признателен своему учителю, доктору техн. наук, проф. В.И. Тихонову за многолетнее сотрудничество и поддержку. Автор благодарит акад. Е.П. Попова за объективную рецензию, своих учеников канд. физ.-мат. наук В.В. Сизых и Б.Я. Курочку, а также аспирантов В.О. Трешневскую и Д.А. Губанова, оказавших большую помощь при подготовке рукописи книги. Автор также благодарит своих дочерей Надежду и Екатерину за спонсорский вклад в издание книги, а также канд. техн. наук Ю.Н. Чернышова за подготовку книги к изданию.

Автор

Введение

Неотъемлемой частью устройств радиоавтоматики являются автогенераторы, системы фазовой и частотной автоподстройки частоты генератора, автодальномеры и др. [1–2].

В книге рассматриваются модели систем радиоавтоматики, подробно анализируются фазовые автоматические системы (ФАС), к которым относятся генераторы и системы ФАП. Эти системы моделируются дифференциальными и разностными уравнениями (ДУ и РУ) первого и более высокого порядков, причем в их правых частях имеется случайная функция. Такие уравнения называют *стохастическими*. Решения ДУ и РУ могут представлять собой марковскую случайную последовательность $x[n] = x_n$ или марковский случайный процесс $x(t)$, где t — время; x — фазовое рассогласование, или сигнал ошибки.

Нелинейными являются ДУ и РУ ФАС, на их основе находят уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) и Колмогорова–Чепмена (КЧ).

Впервые на основе метода марковских случайных процессов статистические характеристики непрерывной ФАС исследованы Р.Л. Стратоновичем [4, 5], И.Г. Акопяном [6, 7], В.И. Тихоновым [8, 9], генераторы описаны в [4–7], фазовая автоподстройка — в [8, 9]. Уравнения ФПК в этих случаях будем называть уравнениями Стратоновича–Тихонова (СТ).

Статистические характеристики ФАС при $g(x) = \sin(x)$ выражаются через модифицированную функцию Бесселя чисто мнимого порядка $I_{i\nu}(r)$, квадрат модуля которой с любой заданной точностью может быть найден на основе быстросходящегося ряда [10]

$$|I_{i\nu}(r)|^2 = \frac{\operatorname{sh}\pi\nu}{\pi\nu}\left[I_0^2(r) + 2\nu^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n I_n^2(r)}{n^2+\nu^2}\right] = \frac{\operatorname{sh}\pi\nu}{\pi\nu}R_\Sigma,$$

где $I_n(r)$ — модифицированная функция Бесселя n-го порядка.

Функция $I_n(r)$ табулирована в [3] при $0{,}61 \leqslant r \leqslant 12$, 18 и $0{,}2 \leqslant \nu \leqslant 10$.

В дальнейшем идеи Р.Л. Стратоновича и В.И. Тихонова были развиты в работах других авторов. В частности, в [10] приведены асимптотические формулы для статистических характеристик ФАС более точные, чем формулы Стратоновича, в [12] статистические характеристики ФАС впервые представлены в форме ряда Фурье, в [13] получены новые данные по статистической динамике ФАС на основе теории выбросов.

В [14] для исследования характеристик ФАС впервые предложен метод статистической линеаризации. В [15] приведены модель стохастической ФАС n-го порядка при $g(x) = \sin x$ и среднее время до срыва слежения в системе первого порядка, которое ранее получено Р.Л. Стратоновичем (см. [4, 5]) и может быть найдено также на основе решения уравнения Понтрягина [16]; вслед за [9] в [15] рассмотрена ФАС второго порядка.

Асимптотические формулы Стратоновича (см. [4, 5]), справедливые для ФАС первого порядка и $g(x) = \sin x$ Н.П. Никитин [17] обобщил на случай ФАС второго порядка с произвольной (дифференцируемой) нелинейностью $g(x)$, используя результаты [18].

В [6, 19] исследован переходный процесс в фазовых автоматических системах, находящихся под воздействием шума.

Результаты исследования непрерывной ФАС обобщены в [20–23].

Стохастические дискретные ФАС на основе марковской модели сигнала ошибки рассмотрены, в частности, в [24–29].

В первой части книги при анализе систем первого порядка систематизированы опубликованные ранее результаты по исследованию статистической динамики ФАС. Показано применение как строгих аналитических и численных методов, основанных на решениях уравнений ФПК и Понтрягина, так и приближенных методов кумулянтного анализа [35–37], статистической линеаризации [12, 38–41] и др. Сопоставлены результаты точных и приближенных методов. Широко использованы ряды Фурье, впервые предложенные для описания статистических характеристик ФАС в [12], а также асимптотический метод получения приближенных значений статистических характеристик ФАС [5, 10, 17, 42]; рассмотрено влияние формы нелинейности $g(x)$ на статистическую динамику ФАС [42, 43].

Моделью системы второго порядка является, в частности, стохастическое ДУ

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \gamma\frac{dx}{d\theta} + rg(x) = \gamma F_0 + \boldsymbol{\Gamma}(\theta),$$

где γ, r, F_0 — параметры; $\boldsymbol{\Gamma}(\theta)$ — белый шум.

Это ДУ описывает как систему ФАП при широкополосном шуме на ее входе, так и джозефсоновский переход [48].

Приведенному ДУ соответствует следующее уравнение ФПК для совместной ПРВ $W = W(x, y, \tau)$ (x — фазовое рассогласование;

y — нормированная производная этой координаты или частота):

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -y\frac{\partial W}{\partial x} + h(x)\frac{\partial W}{\partial y} + \alpha_o\left[\frac{\partial(yW)}{\partial y} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right],$$

где $\tau = \alpha_0 t = \alpha_0 \Omega \tilde{t}$; $\tilde{t}$ — время; $h(x) = g(x) - \beta$; $g(x)$ — нелинейная функция; β, α_0, r, $\mathbf{\Omega}$ — некоторые обобщенные параметры.

Данное уравнение для описания ФАП впервые было получено В.И. Тихоновым [9], для описания химических реакций аналогичное уравнение ФПК впервые получил Х.А. Крамерс [18], и как уравнение Крамерса оно рассматривается в физике и химии [44–48]. Учитывая особенность, которую придает этому уравнению периодическая функция $g(x)$, будем называть это уравнение в дальнейшем уравнением Крамерса–Тихонова (КТ).

Из этого уравнения при больших α_0 следует уравнение ФПК ФАС первого порядка [4, 5, 8, 18, 44–48]

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[h(x)W] + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2},$$

где $W = W(x,t)$. Это уравнение при произвольной нелинейности называют уравнением Смолуховского [47, 48], в случае периодической функции $g(x)$ это — уравнение Стратоновича–Тихонова.

Решение уравнения КТ позволяет найти статистические характеристики ФАС: $W(x,y,\tau)$ — ПРВ; $m_x = E(x)$, $m_y = E(y)$ — числовые характеристики (средние значения); σ_x и σ_y — среднеквадратичные значения. Кроме того, на основе уравнения КТ, используя метод Тихонова [9], можно найти оценку для среднего значения частотного рассогласования [49], справедливой при больших значениях α_0 и произвольном значении r. Используя метод Крамерса [18], можно получить оценку для среднего времени до срыва слежения [17], справедливую при больших значениях r. Среднее значение частотного рассогласования может быть найдено также методом усреднения [50, 51].

Статистическая динамика непрерывной ФАС, которая описывается уравнением КТ, а также общим уравнением ФПК (для ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром), изучалась кроме ранее упомянутых в [52–65] и др. Экспериментальные исследования непрерывных стохастических ФАС нашли отражение в [49, 65–68].

Наряду со строгими методами на основе уравнений ФПК и Понтрягина стохастическая ФАС второго порядка исследовалась приближенными методами: помимо метода усреднения при этом использовались методы кумулянтов (семивариантов) и статистической линеаризации [35, 38–40, 69]; метод статистической линеаризации для анализа ФАС предложен в [14] и применялся в [36, 37, 70, 71].

Воздействия узкополосных помех на систему фазовой автоподстройки второго порядка рассмотрены в [33, 34]. Результаты исследований непрерывной стохастической ФАС второго порядка вошли в монографии [20–23, 48, 72–78] и диссертации [14, 33, 34, 71, 79–84 и др.], а также отражены в обзоре [85] и сборнике статей [86].

Статистические характеристики дискретных импульсных и цифровых ФАС второго порядка до сих пор исследованы в меньшей степени, чем характеристики непрерывных ФАС, отчасти в силу многообразия дискретных систем. Обзор результатов по дискретным системам приводится в [87], некоторые результаты исследований опубликованы в [29, 88], а также в многочисленных статьях и, в частности, в [24, 27, 89–92].

Синтез фазовых автоматических систем может быть осуществлен по нескольким критериям оптимальности, например в [93] синтез осуществляется по обобщенному критерию взвешенной линейной комбинации динамической и флуктуационной ошибок. Этот критерий приводит к процедуре поиска фильтра ФАПЧ на основе метода синтеза физически реализуемого фильтра Винера [93–95]. Обобщенный критерий синтеза использовался также в [96]. В [97] оптимизация осуществлялась на основе метода максимума Понтрягина с целью минимизировать время переходного процесса. В [98–101] синтез осуществлялся на основе теории калмановской фильтрации. Вопросы синтеза ФАП рассмотрены в [102, 103].

Практически важным является определение времени переходного процесса в фазовой автоматической системе при наличии шума на ее входе. Эта характеристика ФАС исследована в [83, 84, 104–107].

К статистическим задачам относится также анализ ФАП при поиске по частоте или захвате меняющегося по частоте сигнала как при отсутствии, так и при наличии помех. Эти задачи рассматриваются в [79, 80, 83, 108–117].

Воздействие гармонических помех на ФАС рассмотрено в [75, 118–121]. Метод усреднения используется при исследовании не только стационарных, но и нестационарных режимов работы ФАС [5, 18, 48, 50, 51, 123–127]. Перечисленные вопросы анализа и синтеза ФАС нашли отражение в данной книге.

1 Математическая модель ФАС и сигнала рассогласования

1.1. Функциональная и структурная схема ФАС. Основные определения и уравнения

В качестве примера ФАС рассмотрим фазовую автоподстройку частоты. Функциональная схема ФАПЧ изображена на рис. 1.1 и состоит из фазового детектора *ФД*, фильтра низких частот *ФНЧ*, управляющего элемента *УЭ* и управляющего генератора *УГ*.

На вход схемы поступает аддитивная смесь $u_1 = u_{\text{э}} + n_0(\tilde{t})$ сигнала $u_{\text{э}}$ с эталонного генератора *ЭГ* (или с другого источника колебания $u_{\text{э}}$) и шума $n_0(\tilde{t})$ ($\tilde{t}$ — время, с), предварительно прошедшего через линейный тракт, настроенный на частоту $f_0 = \omega_0/(2\pi)$.

Предположим, что сигнал $u_{\text{э}}$ имеет вид

$$u_{\text{э}} = \sqrt{2}A\sin[\omega_0\tilde{t} + \theta_{\text{с}}(\tilde{t})],$$

где $\omega_0 = \text{const}$; $A = A_m/\sqrt{2}$ — среднеквадратическое значение напряжения сигнала; A_m — амплитуда сигнала; $\theta_{\text{с}}(\tilde{t})$ — закон изменения фазы сигнала.

Напряжение управляемого генератора запишем в форме

$$u_{\text{г}}(\tilde{t}) = \sqrt{2}A_{\text{г}}\cos[\omega_0\tilde{t} + \theta(\tilde{t})]; \quad d\theta/d\tilde{t} = k_{\text{г}}u_{\text{р}},$$

где $A_{\text{г}} = A_{\text{г}m}/\sqrt{2}$; $A_{\text{г}m}$ — амплитуда колебаний генератора; $k_{\text{г}}$ — коэффициент преобразования блока УЭ–УГ.

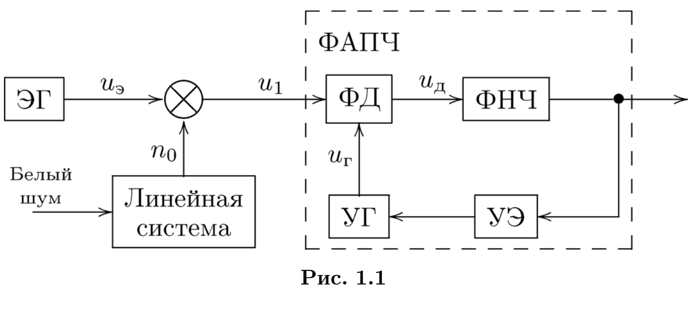

Рис. 1.1

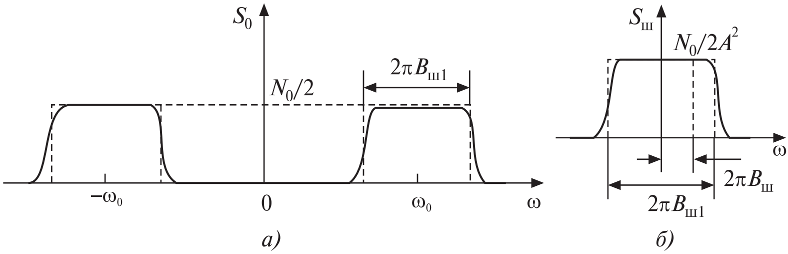

Рис. 1.2

Напряжение шума, прошедшего линейный тракт,

$$n_0(\tilde{t}) = n_c(\tilde{t}) \cos \omega_0 \tilde{t} + n_s(\tilde{t}) \sin \omega_0 \tilde{t},$$

где n_c и n_s — независимые гауссовские случайные процессы.

Шум $n_0(\tilde{t})$ формируется из белого шума с односторонней спектральной плотностью $N_0 = \text{const}$. Белый шум воздействует на линейную систему с частотной характеристикой (ЧХ) $H_1(i\omega)$. В результате энергетический спектр шума $S_0(\omega)$ имеет вид (рис. 1.2,*а*)

$$S_0(\omega) = |H_1(i\omega)|^2 N_0/2.$$

Найдем отношение сигнал/шум (ОСШ) на входе ФАС. Введем одностороннюю шумовую полосу $B_ш$ (в герцах) линейной системы с ЧХ $H_0(i\omega)$, тогда

$$B_ш = \frac{1}{2\pi H_m} \int_0^\infty |H_0(i\omega)|^2 \, d\omega,$$

где $H_m = |H_0(i\omega)|^2_{\max}$.

Обозначим $B_{ш1}$ шумовую полосу линейного тракта, предшествующего ФАС. Тогда мощность P_n шума $n_0(\tilde{t})$ на входе ФАС запишем так:

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \, d\omega = \frac{2(2\pi B_{ш1})}{2\pi} \frac{N_0}{2} = N_0 B_{ш1}.$$

Мощность сигнала $P_с = A^2$, отсюда ОСШ на входе ФАС

$$\rho_1 = P_с/P_n = A^2/(N_0 B_{ш1}).$$

Допустим, что ФД действует как перемножитель колебаний u_1 и $u_г$ с коэффициентом умножения $k_у$. На выходе ФД получим колебание

$$u_д = k_у u_1 u_г = 2k_у A A_г \{\sin[\omega_0 \tilde{t} + \theta_с(\tilde{t})] + [n_с(\tilde{t})/A] \cos \omega_0 \tilde{t} + \\ + [n_s(\tilde{t})/A] \sin \omega_0 \tilde{t}\} \cos[\omega_0 \tilde{t} + \theta(\tilde{t})] = u_{д1} + u_{д2},$$