Предисловие

Функционирование современных радиоэлектронных систем и приборов различного назначения связано с передачей и разнообразными преобразованиями сигналов, которые осуществляются посредством соответствующих физических систем — радиотехнических цепей.

Широкое применение в различных областях науки, техники, медицины и др. находят радиоизмерительные комплексы, представляющие собой достаточно сложные информационно-измерительные системы, одной из составляющих которых являются подсистемы обработки данных. Для получения разнообразной полезной информации о параметрах и характеристиках испытуемых объектов в них используются схемно-конструктивные решения и алгоритмы, позволяющие получать и преобразовывать измерительную информацию в виде некоторых сигналов, являющихся характеристиками объекта измерений. Сигналы являются основным носителем информации любых коммуникационных и измерительных систем. Поэтому теория сигналов, методы их преобразования и анализа представляют интерес для специалистов, работающих в самых различных областях современной техники.

Сигналы могут иметь различное математическое описание, в частности могут описываться функциями одного или нескольких аргументов, как непрерывных, так и дискретных. Извлечение интересующей полезной информации требует осуществления преобразований получаемых измерительных сигналов, реализация которых базируется на соответствующих математических преобразованиях. Обычно математической основой преобразований сигналов являются некоторые интегральные преобразования, как непрерывные, так и дискретные. Так, например, реализация частотно-временных преобразований сигналов, спектральный анализ базируются на преобразованиях Фурье; получение мнимой составляющей аналитического сигнала по известной действительной составляющей (или наоборот) осуществляется с помощью интегрального преобразования Гильберта и т. д.

Для реализации вычислительных функций и алгоритмов измерений в современных радиоэлектронных системах используются либо встроенные специализированные ЭВМ, либо персональные компьютеры. Стремительный рост парка персональных компьютеров и их информационно-вычислительных возможностей при одновременном снижении стоимости делает их применение в измерительных системах все более предпочтительным.

Применение компьютеров привело к широкому использованию методов цифровой обработки сигналов измерительной информации, получаемых в дискретном виде. При этом дискретные сигналы могут иметь различную природу: создаваться непосредственно источником информации или образовываться в результате дискретизации непрерывных сигналов. Именно цифровая обработка сигналов является наиболее перспективной и представляющей наибольшие возможности при разработке и использовании различных радиоэлектронных систем.

В книге наряду с обсуждением в разделе I общих вопросов теории сигналов, связанных с их метрикой, классификацией и т. п. (глава 1), рассмотрены основные виды преобразований сигналов, определяющие принципы обработки и представления измерительной информации в современных измерительных приборах.

В разделе II подробно рассматриваются вопросы спектрального и корреляционного анализа. В частности, обсуждается гармонический анализ сигналов на основе преобразования Фурье с рассмотрением спектров наиболее употребительных сигналов и теорем о спектрах. Приведены основные понятия и представления корреляционного анализа сигналов, такие как автокорреляционная и взаимная корреляционная функции, их свойства, законы распределения случайных величин и др.

В разделе III подробно рассмотрены вопросы, связанные с дискретизацией непрерывных сигналов (глава 8) и их восстановлением по дискретным значениям (глава 11). Подробно описаны (главы 9 и 10) дискретное преобразование Фурье (ДПФ), а также алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Раздел IV книги посвящён наиболее распространённым сигнальным процессам, широко используемым в современной радиоэлектронике. Это процессы, связанные с применением различных видов модулирования сигналов и их демодуляцией (глава 12), а также с преобразованием частоты сигналов (глава 14). Большое внимание уделено спектральному анализу частотно модулированных, фазоманипулированных и фазомодулированных сигналов (глава 13).

В разделе V рассмотрен метод весовых функций, используемый в теории сигналов. Описаны семейства окон, рассмотрены основные характеристики временных и спектральных окон.

Раздел VI книги посвящён различным видам преобразований для непрерывных и дискретных сигналов, используемым в теории сигналов наряду с анализом Фурье. В частности, представлены материалы по преобразованиям Лапласа, Хартли, Лорана, дисперсионным соотношениям Гильберта, Крамерса–Кронига.

Преобразование Лапласа (глава 16), являясь основой операционного исчисления, находит самое широкое применение при анализе сигналов в линейных цепях.

Преобразование Хартли (глава 17) представляет собой модификацию преобразования Фурье, но является действительным интегральным преобразованием, которое находит практическое применение при анализе сигналов.

В главе 18 подробно рассматривается преобразование Лорана, или Z-преобразование, применяемое при анализе дискретных сигналов.

В теоретических исследованиях большую роль играют способ комплексного представления сигналов, основанный на понятии аналитического сигнала, и преобразование Гильберта, применяемое для анализа широко используемых в радиотехнике узкополосных сигналов (глава 19).

Последние две главы Раздела VI книги посвящены кратковременным преобразованиям Фурье, в частности преобразованиям Габора (глава 20) и вейвлет-преобразованиям (глава 21). Вейвлеты представляют семейство особых функций, используемых для частотно-временной локализации сигналов. Основная область их применения связана с преобразованием изображений (сжатием и переносом).

Книга рассчитана на широкий круг читателей: студентов, аспирантов и преподавателей высших учебных заведений радиотехнических специальностей, а также на научных и инженерно-технических работников, работающих в области радиоэлектроники.

I Введение в теорию сигналов

В современном мире, насыщенном разнообразными информационными потоками, огромную роль играют сигналы, несущие в любой форме материального представления полезную информацию. Понятие сигнала является одним из основных во многих областях науки и техники, связанных с передачей и обработкой информации, в частности в теории информации, кибернетике, электронике, радиотехнике, связи и др. В данном разделе рассматриваются основные понятия и представления теории сигналов, в том числе классификация, метрика, основные характеристики сигналов, представления непрерывных и дискретных сигналов, а также приводятся общие сведения о системах преобразования сигналов.

1 Основные понятия и представления теории сигналов [24, 60]

1.1. Понятие сигнала

Деятельность человека неразрывно связана с передачей и получением информации посредством сигналов.

Понятие информации имеет множество определений и смысловых значений в различных отраслях человеческой деятельности.

В информатике под *информацией* обычно понимают совокупность сведений смыслового содержания, которые можно собирать, обрабатывать, передавать и т. п. Это понятие близко, но не тождественно понятию *данные*, которое определяет совокупность фактов, результатов наблюдений, измерений параметров и характеристик каких-либо объектов, явлений, процессов, представленных в формализованном виде, количественном или качественном. Данные — это не информация, а исходный материал для получения информации путём соответствующей его обработки и интерпретации.

В кибернетике под информацией понимают ту часть знаний, которая используется для ориентирования, активного действия, управления, т. е. в целях сохранения, совершенствования, развития системы (Н. Винер).

В технике под информацией понимают сообщения, передаваемые в форме знаков или сигналов.

В информационной системе и программировании *сигнал* — набор переданных и принятых данных, передающий информацию, кодированную определённым образом.

В системе связи сигналы используются для передачи сообщений. Сигнал может генерироваться, но его приём не обязателен, в отличие от сообщения, которое должно быть принято принимающей стороной, иначе оно не является сообщением.

В теории информации и связи *сигнал* — это материальный (физический) носитель информации. Носители информации могут иметь различную материальную форму (механическую, электрическую, магнитную, акустическую, оптическую и др.). Сигналом может быть любой физический процесс, несущий и отображающий некоторую информацию, т. е. процесс, параметры которого изменяются в соответствии с передаваемым сообщением. Информация может заключаться и в факте наличия/отсутствия сигнала при соответствующей предварительной договорённости с получателем этой информации.

В самом общем смысле сигнал — это зависимость одной величины от другой, и с математической точки зрения представляет собой некую информационную функцию, несущую сообщение о физических свойствах, состоянии или поведении какой-либо физической системы, объекта или среды. Для извлечения информационных сведений, запечатлённых в сигналах, осуществляют регистрацию и обработку сигналов, в процессе которой полезная информация преобразуется в форму, удобную для восприятия и дальнейшего использования.

Сигнал несёт информацию, при этом *информативным параметром сигнала* может являться любой параметр носителя сигнала, функционально связанный со значениями информационных данных. Для теоретического изучения, анализа и расчётов сигналов используют их математические описания или математические модели, которые позволяют заменить физическое моделирование процессов математическим. При этом, абстрагируясь от физической природы сигналов, такие модели дают возможность описывать и анализировать главные свойства сигналов, игнорируя их второстепенные признаки. При анализе сигналов используют различные математические преобразования, на основе которых получают выводы о параметрах, характеристиках и специфических особенностях соответствующих процессов и объектов.

Математическая модель сигнала чаще всего представляется функцией времени, хотя это не обязательно, например, в системах оптической обработки информации сигналом может являться зависимость интенсивности света от пространственных координат.

Во многих случаях носителями сигналов являются электромагнитные колебания. *Колебанием* называют любой протекающий во времени процесс $f(t)$, не удовлетворяющий уравнению $f(t) = \mathrm{const}$. Электромагнитное колебание характеризует поведение электромагнитного поля в некоторой среде или в цепи и является одним из основных понятий радиофизики.

Наряду с сигналами, несущими полезную целевую информацию, при их регистрации и обработке часто приходится иметь дело и с мешающими сигналами — шумами и помехами самой различной природы. Источники помех могут быть внутренними и внешними. Внутренние шумы могут быть присущи самой физической природе источников сигналов. Внешние источники шумов могут иметь естественное или искусственное происхождение (флюктуации магнитных полей, молнии, индустриальные помехи и т. д.). К помехам относят и искажения полезных сигналов при воздействии различных дестабилизирующих факторов на процессы измерений.

1.2. Классификация сигналов

Знание математических моделей позволяет проводить классификацию сигналов, используя различные критерии. Так, различают детерминированные и случайные сигналы, периодические и непериодические, вещественные и комплексные, одномерные и многомерные, непрерывные и импульсные, аналоговые, дискретные и цифровые и т. д.

По степени предсказуемости сигналы различаются на детерминированные и случайные.

Детерминированным, или *регулярным*, называют любой сигнал, который задаётся аналитически (или эквивалентным способом, например графически) в виде некоторой определённой функции времени. В самом общем виде математическая модель детерминированного сигнала может быть представлена в виде

$$s = f(t, z, \omega, ...a, b, c, ...), \tag{1.1}$$

где s — детерминированный сигнал; $t, z, \omega, ...$ — независимые аргументы (время, пространственная координата, частота и др.); a, b, $c, ...$ — параметры сигнала.

Все параметры детерминированного сигнала заранее и достоверно известны. Примером детерминированного сигнала может служить гармоническое колебание. По сути дела с информационной точки зрения детерминированный сигнал соответствует заранее известному сообщению и поэтому не несёт в себе никакой новой информации.

Для детерминированных сигналов всегда возможно, исходя из их математической модели, точно предсказать мгновенные значения в любой момент времени. В противном случае, когда такое предсказание невозможно (сигналы представляют собой хаотические функции времени), сигналы называются *случайными*, или *нерегулярными*.

Случайный сигнал представляется функцией времени, значения которой заранее неизвестны и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью. Он не воспроизводится при повторных наблюдениях и не может быть описан явной математической зависимостью. Случайность сигналов может быть обусловлена как собственной физической природой сигналов, так и стохастическим (вероятностным) характером регистрируемых сигналов как по времени или месту их появления, так и по содержанию. Случайные сигналы часто проявляют себя как помехи, препятствующие извлечению информации из принятых колебаний. Для анализа их свойств применяют *статистический подход*, при котором используется математический аппарат теории вероятностей и теории случайных процессов.

Детерминированные сигналы, в свою очередь, подразделяют на периодические и непериодические.

Периодическим сигналом является колебание, описываемое выражением

$$s(t) = s(t + nT) \quad \text{при} \ -\infty < t < \infty, \tag{1.2}$$

где n — любое целое число; T — период колебания.

Значения периодического колебания $s(t)$ повторяются через интервал, кратный периоду T. Такие колебания обладают бесконечной энергией и, строго говоря, являются абстракцией.

Простейшим периодическим детерминированным сигналом является *гармоническое колебание*

$$s(t) = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{1.3}$$

где через A, T, ω и φ обозначены соответственно амплитуда, период, угловая частота и начальная фаза колебания.

Строго гармоническое колебание называют *монохроматическим колебанием*. В природе строго монохроматического колебания не существует, поскольку его спектр, как будет подробнее изложено в последующих разделах, состоит из одной спектральной линии, а у реальных сигналов, имеющих начало и конец, спектр неизбежно «размазывается». Обычно под гармоническим и монохроматическим сигналом подразумевают колебание, определяемое функцией вида (1.3) в конечном, но достаточно большом интервале, чтобы можно было не учитывать влияние концов сигнала.

Наиболее распространённую группу периодических сигналов составляют *полигармонические сигналы*, описываемые суммой гармонических колебаний:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N} A_n \sin(\frac{2\pi nt}{T} + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{N} A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n). \qquad (1.4)$$

Полигармонические сигналы представляют собой сумму определённой постоянной составляющей ($\omega_0 = 0$) и произвольного (в пределе — бесконечного) числа гармонических составляющих с произвольными значениями амплитуд A_n и фаз φ_n с периодами, кратными периоду основной частоты $f_p = 1/T$.

Под *непериодическим* детерминированным сигналом понимают любой детерминированный сигнал, для которого не существует конечного отрезка времени (интервала) T, чтобы выполнялось условие $s(t) = s(t + T)$. Непериодический сигнал обычно ограничен во времени. К непериодическим сигналам относят почти периодические и апериодические сигналы.

Почти периодические сигналы близки по своей форме к полигармоническим. Они также представляют собой сумму нескольких гармонических сигналов, но не с кратными, а с произвольными частотами, отношения которых (хотя бы двух частот минимум) не относятся к рациональным числам, вследствие чего основной период суммарных колебаний бесконечно велик.

Апериодические сигналы задаются произвольными функциями времени. К ним относятся широко используемые в радиотехнике импульсные сигналы.

Непериодические детерминированные сигналы представляют большой интерес, поскольку преимущественно именно такие сигналы используются на практике.

Важным классом сигналов являются *сигналы с ограниченной энергией* или, как их ещё называют, *сигналы с интегрируемым квадратом.* Для таких сигналов справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt < \infty. \qquad (1.5)$$

Предположение о конечности энергии часто используется при анализе сигналов.

Иногда в отдельный класс выделяют сигналы конечной длительности, отличные от нуля только на ограниченном интервале аргументов (независимых переменных). Такие сигналы обычно называют *финитными*.

Функции, описывающие сигналы, могут принимать как вещественные, так и комплексные значения. Именно в этом смысле часто используют понятия *вещественных* и *комплексных* сигналов.

Сигнал, описываемый одной функцией времени, принято называть *одномерным*. При анализе функционирования сложных систем удобно использовать и используют *многомерные*, или *векторные*, сигналы, представляющие некую упорядоченную совокупность одномерных сигналов.

Важным классом сигналов являются уже упомянутые *импульсные* сигналы, представляющие колебания конечной энергии, существенно отличные от нуля лишь в течение ограниченного интервала времени. Все реальные сигналы являются импульсными. Однако в ряде случаев можно пренебречь ограниченностью продолжительности колебания и считать его (теоретически) бесконечно продолжающимся.

Бесконечное во времени колебание может состоять из отдельных периодически повторяющихся импульсов. В этом случае оно представляет *бесконечную последовательность импульсов*. Часто ограниченность последовательности во времени является существенной. В этом случае колебание является *конечной последовательностью импульсов*.

Таким образом, все колебания можно разделить на бесконечные, импульсы, бесконечные и конечные последовательности импульсов.

В классе импульсных сигналов выделяют подкласс *радиоимпульсов*, математическая модель которых имеет вид

$$s(t) = u(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{1.6}$$

где $u(t)$ — огибающая радиоимпульса; $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ — гармоническое колебание заполнения радиоимпульса.

Среди бесконечных во времени колебаний особое значение имеют *модулированные колебания* (сигналы), представляющие собой высокочастотные колебания, на которые накладываются низкочастотные, несущие информацию. Процесс наложения сигнала, содержащего информацию, на высокочастотное колебание называется *модуляцией*. Сигнал, содержащий передаваемую информацию, называется *модулирующим*. Модулируется несущее колебание путём изменения одного или нескольких его параметров.

Наиболее часто несущим колебанием является гармоническое. В наиболее общем виде его можно записать как

$$s(t) = A_m(t) \cos \varphi(t), \tag{1.7}$$

где величина $A_m(t)$ называется *амплитудой*, а $\varphi(t)$ — *полной фазой колебания.*

Изменяя по некоторому закону амплитуду $A_m(t)$, можно получить *амплитудно-модулированные колебания*, а изменяя полную фазу $\varphi(t)$ — *фазово-модулированные* и *частотно-модулированные* колебания (сигналы).

Особую группу модулированных сигналов составляют *кодированные* сигналы, которые получаются путём модулирования гармонического колебания упорядоченной последовательностью импульсов. Такие последовательности называются кодовыми.

Кроме гармонических, в качестве несущих могут использоваться и другие виды колебаний, например периодические последовательности импульсов или шум. Так, например, при передаче цифровой информации в качестве несущего колебания используются последовательности прямоугольных импульсов, для которых возможны такие виды модуляции как *амплитудно-импульсная* (АИМ), *широтно-импульсная* (ШИМ) и *время-импульсная* (ВИМ).

По форме представления основными типами сигналов являются непрерывные (аналоговые), дискретные и цифровые сигналы.

Аналоговый сигнал описывается непрерывной функцией времени $s(t)$, где аргумент t и функция s могут принимать любые значения в диапазоне их изменения. Источниками аналоговых сигналов, как правило, являются физические процессы и явления, непрерывные в динамике своего развития во времени (или по любой другой независимой переменной, например в пространстве), при этом регистрируемый сигнал подобен порождающему его процессу. Множество возможных значений сигнала образует *континиум* — непрерывное пространство, в котором может быть определена любая точка сигнала.

Значения *дискретного сигнала* определены не во все моменты времени, а лишь в счетном множестве точек. Дискретный сигнал может быть получен дискретизацией исходного аналогового сигнала. При этом он представляет последовательность отсчётов, значения которых соответствуют мгновенным значениям исходного сигнала в точках дискретизации (в моменты времени, когда производится считывание сигнала). Как правило, отсчёты берутся через равные промежутки времени, называемые периодом (шагом) дискретизации. Сигнал, дискретный во времени, но не квантованный по уровню, и называется *дискретным сигналом.*

Цифровым сигналом называется дискретный во времени сигнал, квантованный по уровню, т. е. сигнал, отсчётные значения которого принимают лишь конечный ряд дискретных по величине значений (*уровней квантования*), представляемых *цифровыми кодами*, а не уровнями физического процесса. По существу, цифровой сигнал по своим значениям является формализованной разновидностью дискретного сигнала при округлении отсчётов последнего до определённого количества цифр. Цифровой сигнал конечен по множеству своих значений.

В современных информационно-измерительных системах обработка измерительных данных и их анализ проводятся, как правило, в цифровой форме. Поэтому сигналы, снимаемые в аналоговой форме, предварительно преобразуются к цифровому виду.

1.3. Множества и пространства сигналов. Координатный базис пространства

Множества сигналов. В математике часто оперируют понятием множеств. *Множество* есть совокупность всевозможных объектов, обладающих некоторыми определёнными свойствами. Каждый объект, принадлежащий такому множеству, называется *элементом множества*. Элементами множества могут быть объекты любого рода: точки, векторы, функции, события и в том числе сигналы.

Сигналы, обладающие некоторым общим свойством P, можно рассматривать как некоторое *множество сигналов* L. Определив свойство P, тем самым получают возможность ограничивать сигналы, действующие в каких-либо системах, определёнными типами, условиями, границами по параметрам и т. п.

Свойство P с математической точки зрения есть утверждение, справедливое для любого элемента (любого сигнала) множества. Условно множество изображается так: $L = \{s; P\}$, т. е. L есть множество всех сигналов s, для которых справедливо P. Иногда используют другой вид записи, а именно: $P \to s \in L$, что означает «P верно для s, принадлежащего L».

Приведём несколько примеров множеств сигналов из числа упомянутых в п. 1.2, с которыми часто имеют дело в теории сигналов.

Пример 1. Множество гармонических (синусоидальных) сигналов

$$L_{\text{c}} = \{s; s(t) = \text{Re}[\text{e}^{\alpha + j(\theta + 2\pi f t)}],\ -\infty < t < \infty,\ \alpha, \theta, f \in R\}. \qquad (1.8)$$

Утверждение $\alpha, \theta, f \in R$ в (1.8) означает, что эти параметры могут произвольно выбираться из множества всех действительных чисел R. Поэтому L_c содержит гармонические колебания со всевозможными амплитудами, фазами и частотами.

Пример 2. Множество периодических сигналов (T — период сигналов)

$$L_R(T) = \{s; s(t) = s(t+T),\ -\infty < t < \infty\}. \tag{1.9}$$

Пример 3. Множество сигналов с ограниченной энергией

$$L_E(U) = \left\{ s; \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt \leqslant K \right\}. \tag{1.10}$$

О сигналах из множества $L_E(U)$ говорят, что их энергия ограничена величиной K, где K — положительное вещественное число. Интеграл в (1.10) трактуется физически как энергия.

Пример 4. Множество сигналов, ограниченных по амплитуде и длительности

$$L_{MD}(K,T) = \{s; |s(t)| \leqslant K,\ s(t) = 0 \text{ при } |t| > T\}. \tag{1.11}$$

Если множества L и L_1 таковы, что каждый элемент множества L_1 принадлежит к L, то говорят, что L_1 есть *подмножество* множества L, или что L_1 содержится в L (принадлежит L), что математически записывают в виде $L_1 \subset L$ или $L \supset L_1$.

Иногда рассматривают множество L, которое не содержит ни одного элемента, такое множество называют *пустым множеством* и обозначают как $\varnothing$. Пустое множество является подмножеством любого пространства.

Множество L, которое содержит все элементы, которые могут встретиться в конкретном случае исследования, называется *пространством.* В пространстве сигналов каждый сигнал изображается простейшим элементом — точкой или вектором.

Пространства сигналов. Если имеется некое множество L, представляющее совокупность сигналов, обладающих некоторым общим свойством, то возникает вопрос о сравнении между собой по каким-то отличительным свойствам отдельных элементов этого множества. Обший подход для обозначения различия между двумя элементами множества состоит в том, что каждой паре элементов ставится в соответствие некое действительное положительное число, которое трактуется как *расстояние между элементами*, при этом само множество приобретает геометрические свойства. Множество L с соответствующим образом определённым расстоянием представляет собой *пространство сигналов.*

Множество сигналов L образует *вещественное линейное пространство*, если справедливы следующие аксиомы, отражающие взаимосвязь сигналов этого множества.

1. Любой сигнал $s(t) \in L$ при любых значениях временного аргумента t принимает лишь вещественные значения.

2. Для любых сигналов $s_1(t) \in L$ и $s_2(t) \in L$ существует их сумма $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$, которая также содержится в L. При этом операция суммирования должна быть:

- коммутативна: $s_1(t) + s_2(t) = s_2(t) + s_1(t)$;
- ассоциативна: $s_1(t) + (s_2(t) + s_3(t)) = (s_1(t) + s_2(t)) + s_3(t)$;
- однородна: $s(t) + (-s(t)) = \varnothing$.

3. Для любого сигнала $s(t) \in L$ и любого вещественного числа α определён сигнал $f(t) = \alpha s(t) \in L$.

4. Множество L содержит особый нулевой элемент $\varnothing$, такой, что $s(t) + \varnothing = s(t)$ для всех $s(t) \in L$.

Но сигналы могут описываться не только вещественными, но и комплексными функциями. Допуская в аксиоме 3 умножение на комплексное число, приходят к понятию *комплексного линейного пространства.*

Сигналы таких линейных пространств часто называют *векторами* в силу аналогии их свойств со свойствами векторов и для математического анализа сигналов в линейном пространстве используют математику векторов (понятия и представления векторного анализа).

Вектор, образованный суммированием нескольких векторов со скалярными коэффициентами, называется *линейной комбинацией*:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \vec{x}_i. \tag{1.12}$$

Множество всех линейных комбинаций векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_N\}$ образует линейное пространство. Если теперь взять подмножество $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m\}$ множества $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_N\}$, где $m < N$, то множество линейных комбинаций векторов подмножества образует линейное пространство, являющееся подпространством исходного линейного пространства, образованного комбинациями первичного множества векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_N\}$. Это подпространство называется *линейным подпространством.*

Координатный базис пространства. Для измерения и отображения сигналов в линейном пространстве требуется некий метрологический стандарт — *координатный базис пространства.* Он должен представлять собой некое подмножество векторов, играющих роль ортогональных координатных осей с определённой единицей измерения, по которым можно было бы разложить любой произвольный сигнал, принадлежащий этому линейному пространству. Оказывается, в линейном пространстве сигналов, как и в обычном трёхмерном пространстве, можно выделить такое специальное подмножество.

Множество векторов $\{\vec{x}_i; i = 1, 2, ..., N\}$ называется *линейно независимым*, если равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \vec{x}_i = 0 \tag{1.13}$$

справедливо только при всех α_i, равных нулю. Другими словами, в линейно независимом множестве вектор не может быть представлен в виде линейной комбинации других векторов множества. Такое множество векторов и называется *координатным базисом N-мерного пространства.* Обозначим вектора с единичной нормой, определяющие координатный базис пространства, через e_i, тогда координатный базис есть множество $L\{e_i; N\}$.

Число N базисных векторов e_i определяет размерность векторного пространства.

Для всех векторов e_i координатного базиса выполняется условие взаимной ортогональности:

$$(e_m, e_n) = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n, \end{cases} = \delta_{mn}, \tag{1.14}$$

где δ_{mn} — импульс Кронекера.

При наличии ортонормированного базиса, каким является координатный базис, любой произвольный сигнал $s(t)$ может быть представлен в виде линейной комбинации взвешенных базисных векторов:

$$s(t) = c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... + c_N e_N = \sum_{i=1}^{N} c_i e_i, \tag{1.15}$$

где весовые значения (числа) $\{c_1, c_2, ..., c_N\}$ являются проекциями сигнала $s(t)$ на соответствующие координатные оси e_k и определяются скалярными произведениями

$$c_k = (s(t), e_k). \tag{1.16}$$

В задачах теории сигналов число базисных векторов обычно неограниченно велико. Такие линейные пространства называются *бесконечномерными.*

Линейные пространства сигналов имеют, как правило, не единственный базис, поскольку любое множество N независимых векторов в L может служить его базисом. Выбор базиса определяется простотой и удобством его использования для конкретной решаемой задачи.

1.4. Метрика, норма и скалярное произведение сигналов

Основными метрологическими характеристиками сигналов являются метрика, норма и скалярное произведение сигналов.

Метрика сигналов. Для определения расстояния между элементами (сигналами) множества используется функционал, который отображает все пары элементов множества на действительную ось R. Напомним, что под функционалом понимается «функция от функций». Такой функционал, обозначаемый ρ: $\{s_i, s_j\} \to R$, называется *метрикой*, если он обладает следующими свойствами:

- расстояние — это неотрицательная величина
$$\rho(s_i, s_j) \geqslant 0 \text{ и } \rho(s_i, s_j) = 0, \text{ только при } s_i = s_j; \tag{1.17}$$
- расстояние от s_i до s_j равно расстоянию от s_j до s_i (свойство симметрии):
$$\rho(s_i, s_j) = \rho(s_j, s_i); \tag{1.18}$$
- если представить элементы s_i, s_j, s_k геометрически как вершины треугольника, то длина одной стороны треугольника не может превосходить сумму длин двух других сторон (неравенство треугольника):
$$\rho(s_i, s_k) \leqslant \rho(s_i, s_j) + \rho(s_j, s_k). \tag{1.19}$$

Линейное пространство сигналов L с определённой метрикой (расстоянием между точками или векторами, определяющими сигналы) называется *метрическим*.

Норма сигналов. В математике нормой n-мерного вектора $\vec{x}$ называется скалярная функция, обозначаемая как $\|\vec{x}\|$, удовлетворяющая следующим трём условиям:

1) $\|\vec{x}\| > 0$ для $\vec{x} \neq 0$, $\|\vec{x}\| = 0$ для нулевого вектора, т. е. вектора, все компоненты которого равны нулю;

2) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$;

3) $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$, где α — скаляр.

Приведённым трём условиям удовлетворяет, например, обычная длина вектора в евклидовом пространстве R^n при $n \leqslant 3$. Таким образом, понятие нормы есть обобщение понятия длины вектора. Норма вектора равна расстоянию точки от начала координат. Евклидово расстояние есть норма в R^n, так как
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(|\vec{x}|\,|\vec{x}|)}. \tag{1.20}$$

С учётом приведенных выше свойств легко показать, что метрика и норма связаны простым соотношением
$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|. \tag{1.21}$$

Нормированное линейное пространство, являющееся полным метрическим пространством, называется *банаховым пространством.*

Переводя приведённые выше сведения на язык теории сигналов, можно сказать следующее.

Линейное пространство сигналов L является нормированным, если каждому сигналу пространства $s(t)$ однозначно сопоставлена его числовая норма $\|s(t)\|$ и выполняются следующие аксиомы:

- норма неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда сигнал равен нулю ($\|s(t)\| = \varnothing$ при $s(t) = \varnothing$);
- для любого числа α должно быть справедливо равенство $\|\alpha s(t)\| = |\alpha| \cdot \|s(t)\|$.
- если $s_1(t)$ и $s_2(t)$ — сигналы из пространства L, то должно выполняться неравенство треугольника: $\|s_1(t) + s_2(t)\| \leqslant \|s_1(t)\| + \|s_2(t)\|$.

На рис. 1.1 приведен пример метрики и нормы для двух векторов s и v в двумерном пространстве.

Возможны разные способы введения нормы сигналов. При анализе сигналов обычно используют квадратичные нормы, например:

- для вещественных аналоговых сигналов

$$\|s(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt}; \tag{1.22}$$

- соответственно, для дискретных сигналов

$$\|s(n)\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^2(n)}; \tag{1.23}$$

- для комплексных сигналов

$$\|s(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t)\,dt}, \tag{1.24}$$

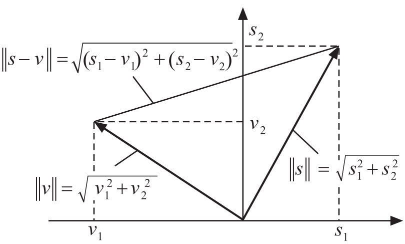

Рис. 1.1. Норма и метрика сигналов

где $s^*(t)$ — величины, комплексно сопряжённые с $s(t)$.

Квадрат нормы носит название *энергии сигнала*

$$E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt. \tag{1.25}$$

Скалярное произведение сигналов. Дополнительной, но очень важной геометрической характеристикой пространства сигналов, позволяющей вычислить угол между сигналами, является скалярное произведение сигналов.

Напомним, что в векторной алгебре *скалярным*, или внутренним, *произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется произведение их длин (норм) $a = \|\vec{a}\|$ и $b = \|\vec{b}\|$ на косинус угла между ними, т. е. на $\cos(\vec{a}, \vec{b})$. Обозначается это произведение обычно точкой:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\vec{a}, \vec{b}). \tag{1.26}$$

Среди других обозначений скалярного произведения употребительны такие: $\vec{a}\vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b})$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

Скалярное произведение есть скаляр и для него справедливо *правило коммутативности* (оно не меняется от перестановки сомножителей)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \tag{1.27}$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ положительно, если эти вектора составляют между собой острый угол, и отрицательно, если угол между ними тупой. Скалярное произведение двух ненулевых взаимно перпендикулярных (ортогональных) векторов равно нулю, так как $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos \pi/2 = 0$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в трёхмерном пространстве, то квадрат модуля их суммы будет равен

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}), \tag{1.28}$$

где $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ — скалярное произведение этих векторов, зависящее от угла между ними.

Скалярное произведение произвольных сигналов $u(t)$ и $v(t)$ отражает степень их связи (сходства) по форме и положению в пространстве сигналов и часто обозначается как $(u(t), v(t))$, $u(t) \cdot v(t)$ или $\langle u(t), v(t) \rangle$. Оно равно:

$$u(t) \cdot v(t) = \|u(t)\| \cdot \|v(t)\| \cos \varphi. \tag{1.29}$$

Скалярное произведение сигналов имеет определённый физический смысл. Чтобы показать его, вычислим энергию суммы сигналов $u(t)$ и $v(t)$:

$$\begin{aligned} E = \int_{-\infty}^{\infty} (u+v)^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} u^2\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} v^2\, dt + 2\int_{-\infty}^{\infty} (u \cdot v)\, dt = \\ = E_{\text{и}} + E_v + 2\int_{-\infty}^{\infty} (u \cdot v)\, dt. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Как видно из (1.30), полная энергия суммы двух сигналов кроме суммы энергий каждого сигнала содержит ещё в себе так называемую *взаимную энергию*

$$E_{uv} = 2\int_{-\infty}^{\infty}(u \cdot v)\,dt, \tag{1.31}$$

т. е. в отличие от самих сигналов их энергии *не аддитивны*.

Сравнивая между собой формулы (1.28) и (1.30), можно определить *скалярное произведение вещественных сигналов* $u(t)$ и $v(t)$ как величину

$$u \cdot v = \int_{-\infty}^{\infty}(u(t) \cdot v(t))\,dt. \tag{1.32}$$

Физически оно определяет половину взаимной энергии сигналов $u(t)$ и $v(t)$.

Косинус угла между сигналами в соответствии с (1.29) будет определяться как

$$\cos\varphi = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}. \tag{1.33}$$

Физическое понятие «угла» между многомерными сигналами довольно абстрактно. Однако при рассмотрении выражения (1.33) совместно с выражением для квадрата метрики сигналов

$$\rho^2(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty}[u(t) - v(t)]^2\,dt = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \cdot \|u\| \cdot \|v\|\cos\varphi \tag{1.34}$$

можно отметить следующие закономерности:

- при $\varphi = 0$ $(\cos\varphi = 1)$ сигналы совпадают по направлению и расстояние между ними минимально;
- при $\varphi = \pi/2$ $(\cos\varphi = 0)$ сигналы «перпендикулярны друг другу» (иначе говоря, ортогональны) и проекции сигналов друг на друга равны 0;
- при $\varphi = \pi$ $(\cos\varphi = -1)$ сигналы «противоположны по направлению» и расстояние между сигналами максимально.

Для дискретных сигналов u_n и v_n в N-мерном пространстве скалярное произведение определяется выражением

$$(u_n, v_n) = \sum_{n=1}^{N} u_n \cdot v_n. \tag{1.35}$$

Важным следствием из определения скалярного произведения (1.29) является то, что величина

$$\sqrt{(s(t), s(t))} = \|s(t)\| \tag{1.36}$$

есть норма в линейном пространстве.