Предисловие

Учебное пособие состоит из трех томов: «Детерминированные сигналы», «Случайные сигналы» и «Модулированные сигналы».

Во втором томе рассмотрены методы представления и описания случайных сигналов, показана связь соответствующего математического аппарата и прикладных задач.

Книга включает четыре главы и приложение.

В главе 1 «Общие сведения о случайных сигналах» приведены основные понятия, законы распределения, характеристические и моментные функции случайных сигналов. Рассмотрены определения непрерывного в среднеквадратическом смысле случайного сигнала, его производной и интеграла, а также соотношения, связывающие корреляционно-спектральные характеристики сигналов на входе и выходе линейных инвариантных во времени систем.

В главе 2 «Основные классы и модели случайных сигналов» рассмотрены стационарные в узком и широком смысле случайные сигналы, их корреляционные и спектральные характеристики. Обсуждены вопросы дифференцирования и интегрирования стационарных случайных сигналов, даны определения характеристик уровня, интервала корреляции и эффективной ширины спектра. Рассмотрены совместно стационарные случайные процессы, а также особенности прохождения стационарных сигналов через линейные инвариантные во времени системы. Дано определение периодически стационарных случайных сигналов и обоснован метод рандомизации задержки (фазы) сигнала. Рассмотрены гауссовские случайные сигналы и их свойства, а также марковские и гауссовские марковские случайные сигналы. Обсуждены вопросы эргодичности стационарных случайных сигналов относительно математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции.

В главе 3 «Представления случайных сигналов» рассмотрены методы представления случайных сигналов рядами по системе ортогональных функций: обобщенный ряд Фурье, разложение

Карунена – Лоэва и разложение в ряд Котельникова. Обсуждены особенности комплексного и квазигармонического представления стационарных случайных сигналов с использованием преобразования Гильберта.

В главе 4 «Узкополосные случайные сигналы» дано определение узкополосного стационарного случайного сигнала, рассмотрены статистические характеристики квадратурных составляющих и приведены соотношения между статистическими характеристиками комплексных и вещественных сигналов во временнóй и частотной области. Введены понятия полосовых стационарных процессов и комплексных процессов с круговой симметрией, определены одномерные законы распределения огибающей и фазы узкополосного гауссовского случайного процесса. Рассмотрено комплексное представление узкополосных нестационарных случайных сигналов, определены статистические характеристики их квадратурных составляющих, приведены соотношения между статистическими характеристиками комплексных и вещественных сигналов, обсуждены особенности разложения комплексных случайных процессов с круговой симметрией в ряд Карунена – Лоэва.

В конце каждой главы приведен список литературы с замечаниями и ссылками.

В приложении представлены справочные формулы, определены единичная импульсная функция, единичная ступенчатая функция и функция знака, даны определения и свойства преобразований Фурье и Гильберта.

Приведено большое количество примеров, иллюстрирующих теоретический материал. Некоторая часть примеров предназначена также для того, чтобы ввести дополнительные понятия и определения. Для разграничения примеров и основного текста они завершаются символом ■.

В книге принята единая система обозначений: функции времени обозначены строчными латинскими буквами, а их спектры – соответствующими прописными буквами.

Глава 1
Общие сведения о случайных сигналах

1.1. Определение, классификация и законы распределения вероятностей случайных сигналов

Рассмотрим основные определения и классификацию случайных сигналов, одномерные, двумерные и многомерные законы распределения случайных сигналов, а также совместные законы распределения двух случайных сигналов.

1.1.1. Основные определения

Случайный (стохастический) сигнал – это сигнал, задаваемый случайной функцией времени $u(t)$, мгновенные значения которой являются случайными величинами. Случайные сигналы часто называют случайными процессами.

Сечение случайного сигнала $u(t)$ – это случайная величина $u(t_i)$, соответствующая некоторому фиксированному значению времени t_i.

Реализация (траектория, выборочная функция) случайного сигнала $u(t)$ – это неслучайная функция времени $u^{(k)}(t)$, равным которой может оказаться случайный сигнал в результате k-го испытания.

На рис. 1.1 представлен ансамбль (множество) реализаций $\left\{u^{(k)}(t)\right\}$ случайного сигнала $u(t)$ (точками обозначены значения выборочных функций в различные моменты времени).

Случайные сигналы можно классифицировать по разным признакам. Наиболее очевидной является классификация случайных сигналов по характеру их реализаций. В зависимости от того, непрерывное или дискретное множество значений принимает реализация $u^{(k)}(t)$ и ее аргумент t, различают следующие основные четыре вида случайных сигналов (рис. 1.2):

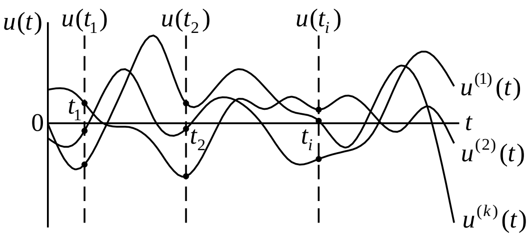

Рис. 1.1. Реализации случайного сигнала

– непрерывный случайный сигнал (случайный процесс общего вида) – случайный сигнал, у которого t и $u^{(k)}(t)$ могут принимать любые значения на отрезке или на всей действительной оси (рис. 1.2, *а*);

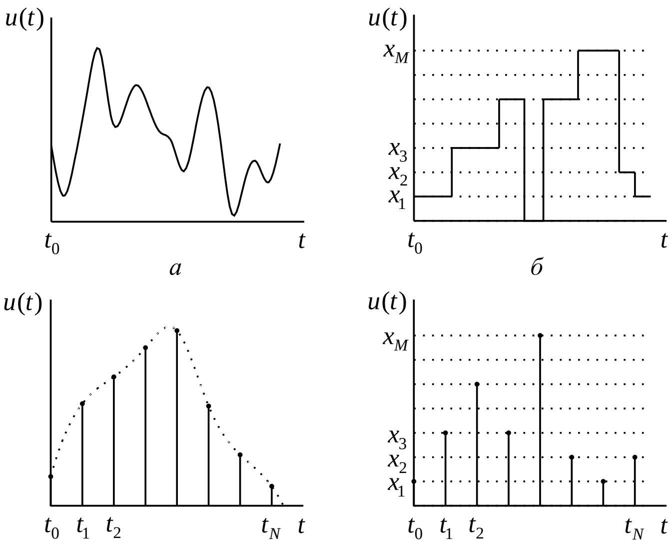

Рис. 1.2. Основные виды случайных сигналов:
а – непрерывный случайный сигнал; *б* – дискретный случайный сигнал; *в* – случайная последовательность; *г* – дискретная случайная последовательность

– дискретный случайный сигнал (дискретный процесс с непрерывным временем) – случайный сигнал, у которого t непрерывно, а $u^{(k)}(t)$ может принимать дискретные значения x_1, x_2, …, x_M (рис. 1.2, *б*);

– случайная последовательность (непрерывный процесс с дискретным временем) – случайный сигнал, у которого $u^{(k)}(t)$ непрерывно, а t может принимать дискретные значения t_0, t_1, …, t_N (рис. 1.2, *в*);

– дискретная случайная последовательность (дискретный процесс с дискретным временем) – случайный сигнал, у которого t и $u^{(k)}(t)$ могут принимать дискретные значения t_0, t_1, …, t_N и x_1, x_2, …, x_M соответственно (рис. 1.2, *г*).

Графики на рис. 1.2, *б* – *г* построены при постоянном шаге по времени и амплитуде, когда $t_{i+1} - t_i = \text{const}(i)$ и $x_{j+1} - x_j = \text{const}(j)$. Множества значений $\{t_i\}$ и $\{x_j\}$ могут быть конечными или бесконечными (в последнем случае $N \to \infty$ и $M \to \infty$).

В дальнейшем по умолчанию предполагается, что сигналы $u(t)$ являются случайными процессами общего вида.

1.1.2. Одномерные законы распределения вероятностей и их свойства

Одномерные функция распределения и плотность распределения вероятностей полностью описывают случайный процесс $u(t)$ в некоторый фиксированный момент времени t.

Одномерная (интегральная) функция распределения случайного сигнала $u(t)$ – это функция, определяющая вероятность того, что его сечение в момент времени $t = t_1$ принимает значение, меньшее x_1:

$$F_1(x_1; t_1) = F(x; t) = P\{u(t) < x\}. \tag{1.1}$$

Свойства функции $F(x; t)$:

– функция $F(x; t)$ является безразмерной функцией, значения которой ограничены неравенством

$$0 \le F(x;t) \le 1, \qquad (1.2)$$

в силу того, что она представляет собой вероятность;

– предельные значения функции $F(x;t)$ составляют

$$F(-\infty;t) = 0 \text{ и } F(\infty;t) = 1, \qquad (1.3)$$

поскольку это вероятности невозможного и достоверного события соответственно;

– функция $F(x;t)$ является неубывающей функцией аргумента x

$$F(x_2;t) \ge F(x_1;t) \text{ при } x_2 > x_1 \qquad (1.4)$$

и, следовательно, вероятность того, что в момент t сечение $u(t)$ примет значение, принадлежащее интервалу $[\alpha,\beta)$, определяется выражением

$$P\{\alpha \le u(t) < \beta\} = F(\beta;t) - F(\alpha;t). \qquad (1.5)$$

Одномерная плотность распределения (дифференциальная функция распределения) вероятностей случайного сигнала $u(t)$ – это производная функции распределения по аргументу x:

$$f_1(x_1;t_1) = f(x;t) = \frac{\partial F(x;t)}{\partial x}. \qquad (1.6)$$

Функцию $f(x;t)$ также можно определить соотношением

$$f(x;t) = P\{x < u(t) \le x + dx\}. \qquad (1.7)$$

Свойства функции $f(x;t)$:

– функция $f(x;t)$ имеет размерность, обратную размерности амплитуды случайного сигнала $u(t)$ и является неотрицательной функцией аргумента x при любых значениях t

$$f(x;t) \ge 0, \qquad (1.8)$$

что следует из выражений (1.4) и (1.6);

– вероятность того, что в момент t сечение $u(t)$ примет значение, принадлежащее интервалу $[\alpha,\beta)$, наряду с (1.5) определяется выражением

$$P\{\alpha \le u(t) < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x;t)dx, \qquad (1.9)$$

поскольку согласно (1.6) функция $F(x;t)$ является первообразной плотности $f(x;t)$;

– интеграл от плотности распределения в бесконечных пределах равен единице

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;t)dx = 1, \qquad (1.10)$$

что следует из соотношений (1.9) и (1.3);

– функции $F(x;t)$ и $f(x;t)$ связаны соотношением

$$F(x;t) = \int_{-\infty}^{x} f(x;t)dx. \qquad (1.11)$$

1.1.3. Двумерные законы распределения вероятностей и их свойства

Двумерные функция распределения и плотность распределения вероятностей позволяют учесть статистическую связь между сечениями процесса $u(t)$ в произвольные моменты времени t_1 и t_2.

Двумерная функция распределения случайного сигнала $u(t)$ – это функция, определяющая вероятность того, что его сечение в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ принимает значения, меньшие x_1 и x_2:

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{u(t_1) < x_1, u(t_2) < x_2\}. \qquad (1.12)$$

Свойства функции $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$:

– значения функции $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ ограничены неравенством

$$0 \le F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) \le 1; \qquad (1.13)$$

– функция $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ является неубывающей функцией по каждому аргументу

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) \ge F_2(y_1, x_2; t_1, t_2) \text{ при } x_1 > y_1,$$
$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) \ge F_2(x_1, y_2; t_1, t_2) \text{ при } x_2 > y_2; \qquad (1.14)$$

– предельными значениями функции $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ являются

$$F_2(-\infty, x_2; t_1, t_2) = F_2(x_1, -\infty; t_1, t_2) =$$
$$= F_2(-\infty, -\infty; t_1, t_2) = 0; \; F_2(\infty, \infty; t_1, t_2) = 1; \qquad (1.15)$$

– при $x_1 = \infty$ или $x_2 = \infty$ функция $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ вырождается в одномерную функцию распределения по оставшемуся аргументу

$$F_2(x_1, \infty; t_1, t_2) = F_1(x_1; t_1),$$
$$F_2(\infty, x_2; t_1, t_2) = F_1(x_2; t_2). \qquad (1.16)$$

Двумерная плотность распределения случайного сигнала $u(t)$ – это вторая смешанная частная производная функции распределения по аргументам x_1 и x_2:

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \qquad (1.17)$$

Ее также можно определить выражением

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) =$$
$$= P\{x_1 < u(t_1) \le x_1 + dx_1, \, x_2 < u(t_2) \le x_2 + dx_2\}. \qquad (1.18)$$

Свойства функции $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$:

– плотность распределения $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ имеет размерность, обратную размерности квадрата амплитуды случайного сигнала $u(t)$ и является неотрицательной функцией

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) \ge 0; \qquad (1.19)$$

– двойной интеграл от плотности распределения в бесконечных пределах равен единице

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1dx_2 = 1; \tag{1.20}$$

– функция $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ является симметричной функцией аргументов x_1 и x_2

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_2, x_1; t_2, t_1); \tag{1.21}$$

– одномерные плотности распределения определяются из двумерной плотности $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ путем ее интегрирования по соответствующим аргументам

$$\begin{gathered} f_1(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_2, \\ f_1(x_2; t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1; \end{gathered} \tag{1.22}$$

– функции $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ и $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ связаны выражением

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1dx_2\,; \tag{1.23}$$

– для функции $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) &= f_1(x_1; t_1)\, f_2(x_2; t_2 \mid x_1; t_1) = \\ &= f_1(x_2; t_2)\, f_2(x_1; t_1 \mid x_2; t_2), \end{aligned} \tag{1.24}$$

где $f_2(x_2; t_2 \mid x_1; t_1)$ – условная плотность распределения случайного сигнала $u(t)$ в момент t_2, вычисленная в предположении, что в момент t_1 сечение сигнала составляет $u(t_1) = x_1$; $f_2(x_1; t_1 \mid x_2; t_2)$ – условная плотность распределения в момент t_1 при условии, что $u(t_2) = x_2$.

Безусловная и условные плотности вероятностей обозначены одним символом f_2; однако их легко различить по написанию аргументов.

1.1.4. Многомерные законы распределения вероятностей и их свойства

В общем случае случайный сигнал $u(t)$ описывается с помощью многомерных (n-мерных) функций (плотностей) распределения вероятностей и тем детальнее, чем больше их размерность n.

Многомерная функция распределения вероятностей случайного процесса $u(t)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} &F_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = \\ &= P\{u(t_1) < x_1, u(t_2) < x_2, ..., u(t_n) < x_n\} \end{aligned} \qquad (1.25)$$

и имеет следующие свойства:

– функция $F_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n)$ является безразмерной неубывающей функцией аргументов x_1, x_2, …, x_n, причем ее значения ограничены неравенством

$$0 \le F_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) \le 1; \qquad (1.26)$$

– предельные значения функции $F_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n)$ составляют

$$\begin{aligned} &F_n(-\infty, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = \\ &= F_n(x_1, -\infty, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = ... \\ &... = F_n(x_1, x_2, ..., -\infty; t_1, t_2, ..., t_n) = 0; \\ &F_n(\infty, \infty, ..., \infty; t_1, t_2, ..., t_n) = 1; \end{aligned} \qquad (1.27)$$

– при $x_i = \infty$ n-мерная функция распределения вырождается в (n – 1)-мерную по оставшимся аргументам

$$\begin{aligned} &F_n(x_1, ..., x_{i-1}, \infty, x_{i+1}, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = \\ &= F_{n-1}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n). \end{aligned} \qquad (1.28)$$

Многомерная плотность распределения вероятностей случайного сигнала $u(t)$ определяется выражением

$$f_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n} \qquad (1.29)$$