Введение

30 апреля 2016 г. мировое научно-техническое сообщество отметило 100-летие со дня рождения Клода Эльвуда Шеннона, гениального учёного [1], основоположника теории передачи информации (1948 г.). Основные положения этой теории трансформировались в два новых технических направления: теория помехоустойчивого кодирования в каналах с гауссовским шумом и теория эффективного кодирования источников сообщений.

Несмотря на значительные достижения в указанных областях, основная проблема К.Э. Шеннона, сформулированная им в теореме о пропускной способности непрерывного канала с аддитивным белым гауссовским шумом, до сегодняшнего дня остаётся нерешённой, что является основной нерешённой проблемой в теории передачи информации и в теории помехоустойчивого кодирования.

Кроме того, решение проблемы К.Э. Шеннона в области частотной эффективности канала $\gamma > 16$ бит/с/Гц (более $\log_2 m = 8$ бит/отсчёт) невозможно из-за физического отсутствия на сегодняшний день методов цифровой модуляции в этом диапазоне значений частотной эффективности канала.

Автор на основе асимптотических подходов даёт решения проблемы К.Э. Шеннона в непрерывном канале с АБГШ, сопровождая их выбором энергочастотных параметров и подробными расчётами помехоустойчивости реальных систем связи и передачи данных.

1 Современные достижения в области двоичного помехоустойчивого кодирования. Успех или тупик?

Теорема К.Э. Шеннона для пропускной способности непрерывного гауссовского канала опубликована им уже более 70 лет назад [2]. Согласно этой теореме, применяя достаточно сложную систему кодирования (при доказательстве теоремы использовано случайное кодирование), можно передавать двоичную информацию со скоростью

$$C = \frac{\log_2 M}{T} \leqslant W \log_2 \left(1 + \frac{P}{N}\right), \text{ бит/с}$$

со сколь угодно малой частотой ошибок.

Однако до сегодняшнего дня система кодирования, с помощью которой можно передавать информацию со скоростью, равной пропускной способности канала, со сколь угодно малой частотой ошибок, не найдена, что составляет основную нерешённую проблему в теории передачи информации и в теории помехоустойчивого кодирования.

При частотной эффективности канала, равной частотной эффективности системы модуляции и кодирования, т. е. при $C/W = R/W$, определяем отношение $E_{\text{бит}}/N_0$, требуемое границей К.Э. Шеннона. Для найденного отношения $E_{\text{бит}}/N_0$ рассчитаем вероятность блоковой ошибки декодирования $Q_{\text{ош}}$ реального помехоустойчивого кода (ПК). Качество реального ПК определяется достигнутой вероятностью $Q_{\text{ош}}$. Такой критерий сравнения можно назвать абсолютным.

В данной главе приводятся лучшие, на наш взгляд, результаты в области двоичного помехоустойчивого кодирования, опубликованные в открытой печати.

Для оценки современных достижений в области ПК авторы воспользовались исследовательской секцией web-сайта JPL [3], на котором представлены наиболее интересные ре-

Таблица 1

Примеры помехоустойчивых кодов [3]

Параметры кода (n, k)	Тип кода	$\frac{E_{\text{бит}}}{N_0}$, дБ	R/W, $\frac{\text{бит}}{\text{с} \cdot \text{Гц}}$	$\Delta\beta_{\text{ППСУ}}$, дБ	$\Delta\beta_{\text{Шен}}$, дБ
E(49152, 16243)	Асимптотический турбокод	0,23	0,661	0,63	0,789
H1(24000, 6000)	Код с низкой плотностью проверок на четность	0,05	0,5	0,52	0,867

зультаты различных авторов и компаний в данной области. В табл. 1 приводятся два помехоустойчивых кода, взятые из [3], с наименьшими расходами энергии на бит 0,23 дБ (код Е) и 0,05 дБ (код H1) при блоковой вероятности ошибки декодирования $Q_{\text{ош}} = 10^{-4}$. Эти коды при блоковых длинах $n_{\text{E}} = 49152$ и $n_{\text{H1}} = 24000$ отстоят от границы плотнейшей поверхностно-сферической упаковки на 0,63 дБ и 0,52 дБ соответственно, но от границы К.Э. Шеннона ($n \to \infty$) при $C/W = R/W$ они отстоят на 0,789 дБ и 0,867 дБ соответственно.

Лучшими результатами в области двоичного непрерывного кодирования на сегодняшний день являются результаты Claude Berrou и других соавторов [4], полученные ими для свёрточных турбокодов (СТК) с параметрами: относительная скорость кодера $r = 1/2$, кодовые генераторы (в восьмеричной форме) $G_1 = 37$, $G_2 = 21$, кодовое ограничение свёрточного кода $K = 5$. В кодере выполняется прямоугольное перемежение с глубиной $256{\times}256$ бит.

Кодер СТК строится, используя параллельное каскадное соединение двух рекуррентных систематических свёрточных кодов; объединённый декодер, использующий декодирование с обратными связями, внедряется в виде Р конвейерных идентичных элементарных декодеров. Например, для 18 итераций декодирования ($P = 18$) при $E_{\text{бит}}/N_0 = 0{,}7$ дБ обеспечивается вероятность ошибки на выходе декодера $q_{\text{бит}} \leqslant 10^{-5}$, т. е. при относительной скорости передачи $= 1/2$ энергетическая характеристика отстоит от границы К.Э. Шеннона на 0,7 дБ ($(E_{\text{бит}}/N_0)_{\text{Шен}} = 0$ дБ).

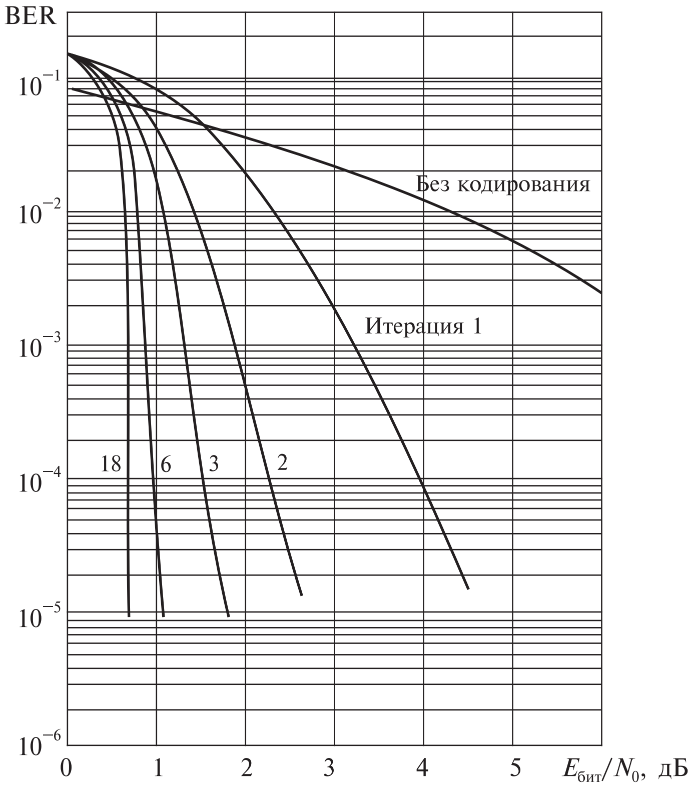

Рис. 1. Зависимость вероятности ошибки декодирования на бит (BER) от отношения $E_{\text{бит}}/N_0$ для итеративного декодирования сверточных турбокодов; относительная скорость передачи $r = 1/2$; число итераций декодирования от 1 до 18 включительно; перемежение 256×256 бит

На рис. 1 приводится вероятность ошибки декодирования на бит для СТК при итеративном декодировании ($p = 1, \ldots, 18$) со скоростью 1/2; перемежение 256×256 бит [4].

Основные достигнутые за рубежом результаты, относящиеся к декодированию блоковых низкоплотностных кодов (LDPC), приводятся на рис. 2 [5, 24]. Там же приводятся характеристики помехоустойчивости двух дуобинарных турбокодов ($n = 848$ и $n = 3008$), работающих сразу с парами битов, в канале с аддитивным белым гауссовским шумом и двоичной фазовой модуляцией. Кривой «LDPC ($n = 10000000$)SP)» показаны характеристики очень длинного LDPC-кода с длиной

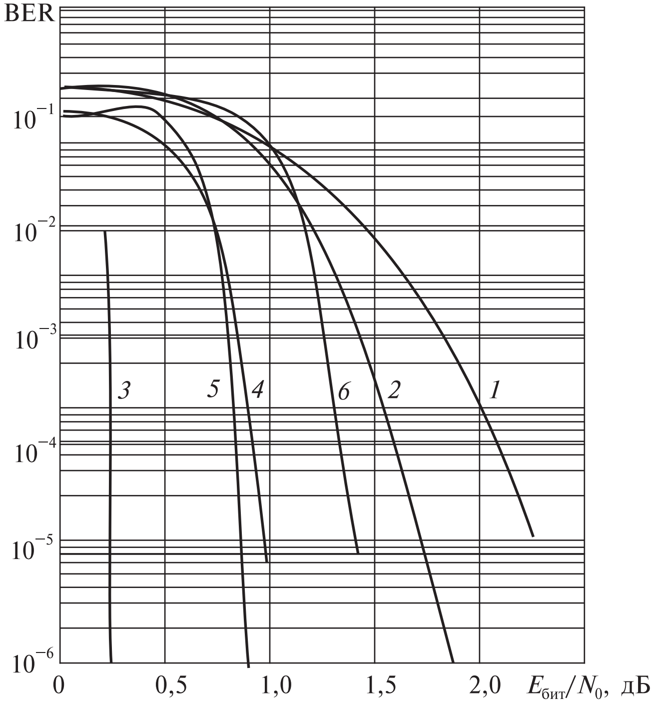

Рис. 2. Помехоустойчивость блоковых турбокодов и кодов с низкой плотностью проверок на чётность (turbo и LDPC-коды), а также асимптотические возможности LDPC-кодов ($n = 10^7$): *1* — turbo DVB-S ($n = 848$) MLM; *2* — turbo DVB-S ($n = 3008$) MLM; *3* — LDPC ($n = 10000000$) SP; *4* — LDPC DVB-S2 ($n = 16200$) SP; *5* — LDPC DVB-S2 ($n = 64800$) SP; *6* — LDPC DVB-S2 ($n = 16200$) MS

блока $n = 10^7$ символов. При кодировании выполняется до 2000 итераций sumproduct алгоритма декодирования.

Графическая зависимость помехоустойчивости этого кода является наглядной демонстрацией асимптотических возможностей двоичных кодов данного класса. Она, как и все остальные графики рис. 1 и 2, наглядно демонстрируют тот факт, что при асимптотическом приближении к границе К.Э. Шеннона ($r = 1/2$, $(E_{\text{бит}}/N_0)_{\text{Шен}} = 0$ дБ) вероятность ошибки декодирования лучших классов двоичных кодов с одномерной двоичной модуляцией стремится к $q_{\text{бит}} \geqslant 0{,}1$, т.е. такая система сигналов и помехоустойчивого кодирования является ненадежной.

На рис. 2 приведены характеристики методов коррекции ошибок для турбо и низкоплотностных кодов [5] при относительной скорости передачи $r = 1/2$ и следующих алгоритмах декодирования:

- MLM — maxlogMAP, 8 итераций;
- SP — sumproduct, до 50 итераций;
- MS — minsum.

Таким образом, лучшие двоичные коды (и непрерывные, и блоковые) с одномерной двоичной модуляцией не способны обеспечить высокую надёжность при асимптотическом приближении к границе К.Э. Шеннона и, тем более, при частотной эффективности $R/W = C/W$ канала и минимальном отношении $E_{\text{бит}}/N_0 = (E_{\text{бит}}/N_0)_{\text{Шен}}$.

Для реализации этого приближения необходимо перейти к более эффективным (по отношению R/W) системам модуляции и помехоустойчивого кодирования. Обоснование такого подхода приводится в [6–9].

2 Энергочастотная эффективность и помехоустойчивость передачи ансамблей ортогональных кодов по непрерывному гауссовскому каналу

Рассмотрен частный случай решения проблемы К.Э. Шеннона в непрерывном канале с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) с применением ортогональных кодов (ОК). Показано, что одновременная и синхронная передача всего ансамбля ОК с использованием его полной разделимости на приёме позволяет поддерживать частотную эффективность канала $\gamma_{\text{кан}} = 2$ бит/с/Гц и при минимально допустимом отношении $E_{\text{бит}}/N_0 = 1{,}76$ дБ с увеличением длины кода $n \geqslant 32$ обеспечивает вероятность правильного приёма всего ансамбля ОК $P_{\text{пр.М}} \to 1$.

Расчёты помехоустойчивости, опубликованные в [10] под редакцией С. Голомба, показывают, что ортогональные, симплексные и биортогональные блоковые коды даже большой длины (до $n = 2^{20}$) не способны работать с высокой достоверностью при энергетических затратах и частотной эффективности, равными соответственно энергетическим затратам и частотной эффективности непрерывного канала с АБГШ. Например, для ортогонального кода (ОК) с числом информационных символов $k_2 = 20$ бит, $\gamma = 3{,}8 \cdot 10^{-5}$ бит/с/Гц вероятность ошибки декодирования $q_{\text{бит}} = 10^{-7}$ достигается при $E_{\text{бит}}/N_0 = 4{,}22$ дБ, тогда как потребности канала при данной частотной эффектиности составляют $-1{,}5917$ дБ. Эти результаты согласуются с выводом J.M. Wozencraft, I.M. Jacobs [11]: для ортогональных кодов $\lim\limits_{n\to\infty} Q_{\text{ош}} = 0$ при $E_{\text{бит}}/N_0 > 2\ln 2 = 1{,}42$ дБ, т.е. эти коды не способны работать на предельных значениях параметров границы К.Э. Шеннона ($\min E_{\text{бит}}/N_0 = \ln 2$ при частотной эффективости канала $\gamma_{\text{кан}} \to 0$ бит/с/Гц [12]).

Данный анализ приводит к заключению, что в настоящее время не существует методов помехоустойчивого кодирования, способных выйти на границу К.Э. Шеннона в области малых значений частотной эффективности канала ($\gamma \leqslant$ $\leqslant 1$ бит/с/Гц).

Аналогичное рассмотрение возможностей выхода на границу К.Э. Шеннона при частотной эффективности канала $\gamma >$ > 16 бит/с/Гц (более 8 бит/отсчёт) приводит к заключению о невозможности такого выхода ввиду физического отсутствия метода цифровой модуляции с такой эффективностью (максимальная частотная эффективность $\gamma = 16$ бит/с/Гц (8 бит/отсчёт) обеспечивается методом КАМ и новым методом цифровой модуляции ФМ-АМ (стандарт DVB-S2)).

Общепринятым подходом к передаче сообщений по радиоканалу является передача одной закодированной комбинации из всего объёма кода. При статистически независимых и равновероятных сообщениях в этом случае передаётся максимальное количество информации, равное $\log_2 M$ бит/сообщение. Однако ортогональные коды обладают замечательным свойством полной разделимости ансамбля, что позволяет передавать одновременно и синхронно все комбинации ортогонального кода, а затем разделять их на приёме. При этом каждая комбинация передаёт только один бит информации, но суммарный объём информации, передаваемый всем ансамблем кода, равен объёму кода, т. е. M бит.

Блок-схема передающей части представлена на рис. 3. Входные символы сообщений имеют значения $\{0, 1\}$, но символам на выходе кодера (на входе линейного сумматора) присваиваются значения $\{\pm 1\}$. Блок-схема состоит из M кодеров параллельного кодирования данным ортогональным кодом (длина кода $n = 4m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, объём кода $M = n$, минимальное расстояние кода $d_x = n/2$), линейного сумматора с M входами, выходного фильтра, согласованного с длительностью чипа (полоса фильтра $F = 1/2\tau_{\text{кан}}$) и схемы умножения на $\sin \omega_0 t$, выполняющей функцию переноса видеоспектра суммарного сигнала на несущую частоту. Линейный сумматор, согласованный фильтр на его выходе и схема умножения на $\sin \omega_0 t$ являются частями модулятора амплитудно-импульсной модуляции (АИМ) с основанием $q = n + 1$.