Предисловие

Курсы по статистической динамике и теории случайных процессов имеются в программе подготовки специалистов по ряду специальностей, в том числе в программах подготовки бакалавров «Управление в технических системах» (27.03.04), «Мехатроника и робототехника» (15.03.06), «Радиотехника», а также в соответствующих магистерских программах. Учебное пособие соответствует требованиям к результатам освоения образовательной программы по данным специальностям, содержащимся в ФГОС и ПС по указанным специальностям.

Теорию случайных процессов создавали своими фундаментальными работами А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин, Н. Уолд, Д. Дуб, Н. Винер и др. История развития методов статистической радиотехники немыслима без приоритетных работ П.И. Кузнецова, Р.Л. Стратоновича, В.И. Тихонова. Книги В.И. Бунимовича (1951), Б.Р. Левина (1957, 1966, 1968), В.Л. Лебедева (1958), Р.Л. Стратоновича (1961), С.М. Рытова (1976, 1978), В.С. Пугачева (1990) и др. до сих пор востребованы учеными-радиофизиками России.

Общепринятый в настоящее время аксиоматический подход к теории вероятностей был изложен в работе А.Н. Колмогорова [1].

В главах 1 и 2 учебного пособия А.А. Боровкова [2] представлено строгое и подробное изложение вопросов, связанных с построением вероятностных пространств.

Книгу Г. Секея [3] с описанием парадоксов в теории вероятностей и математической статистике авторы рекомендуют читателю, желающему глубже разобраться с фундаментальными вопросами теории вероятностей.

С теорией множеств и теорией меры можно ознакомиться, например, в учебном пособии И.П. Натансона [4].

Несмотря на то что приведенные ниже задачи не требуют для решения знаний основ функционального анализа, авторы постараются объяснить физический смысл формальных математических конструкций вероятностных пространств, чтобы облегчить читателю, осваивающему образовательные программы инженерного профиля и стремящемуся глубже понять математическую теорию, лежащую в основе вероятностных методов, сделать первые шаги в изучении специализированной математической литературы.

Данное учебное пособие в значительной степени использует материалы перечисленных книг [5–12] наряду с материалами зарубежных исследований [13–17]. Кроме того, при создании данного пособия использовали результаты собственных разработок [18, 19], а также справочную литературу [20–26].

Особенность данного пособия, отличающая его от подобных книг, заключается в большем объеме текста, посвященного задачам и их решениям, при относительно малом объеме теоретических сведений, носящих служебный характер и предназначенных для создания базы, позволяющей решать приведенные задачи.

Другой особенностью данного пособия является способ анализа линейных и нелинейных систем при случайных воздействиях, а именно введение стохастических дифференциальных и разностных уравнений и, что характерно для данного пособия, с привлечением теории марковских случайных процессов.

В данном пособии при анализе линейных систем широко используются преобразования Фурье, Лапласа и операционного исчисления.

В связи с этим для облегчения их использования приводятся приложения, содержащие таблицы преобразований.

Авторы благодарят рецензентов д-ра техн. наук, профессора А.С. Ющенко, д-ра техн. наук, профессора А.В. Пестрякова, д-ра техн. наук Н.М. Тихомирова за ценные замечания, учтенные авторами.

Авторы благодарят также за редактирование пособия канд. техн. наук Ю.Н. Чернышова и надеются, что данное пособие будет использовано как в педагогической практике, так и при проведении исследований.

Введение

Методически структура учебного пособия состоит из двух частей: часть I «Введение в теорию и условия задач» и часть II «Решение задач». Такая структура, по мнению авторов, более приспособлена для студентов и магистров, впервые приступивших к изучению вопросов статистической динамики систем.

В состав пособия включены девять глав, каждая из которых посвящена одному из частных вопросов теории вероятностей и теории случайных процессов. При этом первые три главы посвящены характеристикам случайных процессов в целом, а в остальных шести главах рассматриваются свойства частных разновидностей случайных процессов (гауссовского, пуассоновского, марковского и др.).

Так, например, в первой главе приводятся теоретические сведения и задачи по основам теории вероятностей случайных величин и некоторые определения из теории случайных процессов. Приводятся такие понятия, как функция распределения, плотность распределения вероятностей (ПРВ), моментные и характеристические функции, корреляционные (КФ) и ковариационные (КВФ) функции и др.

Приведенные задачи иллюстрируют теоретические положения, приводимые в первой части главы.

Две последующие главы (2-я и 3-я) посвящены различным способам описания случайных процессов, причем параллельно рассматриваются как непрерывные, так и дискретные случайные процессы. Во второй главе доказывается теорема Винера–Хинчина для непрерывных случайных процессов и теорема Уолда для дискретных процессов.

Вводится понятие спектральной плотности мощности (СПМ), или, эквивалентно, понятие энергетического спектра (последнее понятие впервые ввел С.О. Райс).

Во второй части главы приводятся задачи на применение теорем Винера–Хинчина и Уолда при решении практических задач.

В третьей главе рассматриваются воздействие случайных процессов двоякого рода на непрерывные и дискретные (включая цифровые) линейные системы. Анализируются как стационарные, так и переходные режимы, причем в последнем случае через решения стохастических дифференциальных (ДУ) и разностных (РУ) уравнений.

Первыми тремя главами исчерпывается общая часть теории случайных процессов.

Далее в последующих главах 4–9 рассматриваются частные разновидности случайных процессов.

В главе 4 рассматриваются гауссовские случайные процессы (ГСП), включая узкополосные ГСП, их огибающую и фазу. Представлены матричные характеристики n-мерных сечений ГСП.

Ряд вопросов в исследовании ГСП отнесен в раздел «Задачи».

В главе 5 анализируются случайные процессы с независимыми приращениями и их частные случаи в виде гауссовских, винеровских и пуассоновских СП. Представлены выражения для корреляционных функций винеровского и пуассоновского СП.

В следующей, 6-й главе рассматриваются ортогональные разложения случайных процессов (разложение Карунена–Лоэва). Представлены общие положения, примеры разложения и задачи.

В седьмой главе подробно рассматриваются характеристики пуассоновских случайных процессов (ПСП). Анализируются разновидности ПСП, в том числе пуассоновские потоки. Доказывается теорема о пуассоновском потоке. Приводится пример ПСП в форме случайного телеграфного сигнала (СТС).

Далее в главе 8 анализируются марковские случайные процессы (МСП) и цепи. Показано, что для МСП можно найти ПРВ сечений любой размерности, если известны начальное распределение и вероятности переходов. Приводятся уравнения Смолуховского и Колмогорова–Чепмена. Дан вывод уравнения Фоккера–Планка–Колмогоров (ФПК).

На основе стохастических интегралов Ито и Стратоновича получены стохастические ДУ в форме Ито и в форме Стратоновича.

Отдельный раздел данной главы посвящен марковским цепям. Доказана теорема о дискретной цепи Маркова. Рассмотрен марковский процесс рождения и гибели.

В главе 9 анализируются импульсные случайные процессы. Доказываются две леммы и две теоремы: теорема Кемпбела и теорема о корреляционной функции импульсного случайного процесса.

Во второй части учебного пособия приводятся решения задач, сформулированных в каждой из глав 1–9.

Часть I

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ И УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1 Общие сведения из теории вероятностей

1.1. Основные теоретические сведения

Данное учебное пособие посвящено использованию теории случайных процессов в радиотехнике, радиоэлектронике и автоматике [5–17], но прежде чем дать определения понятий, относящихся к данной теме, необходимо вспомнить некоторые фундаментальные понятия теории вероятностей [1].

Пространством элементарных событий Ω будем называть некоторое множество, элементами ω_i которого являются элементарные события. Элементарные события являются несовместными, т. е. в результате некоторого мысленного опыта может реализоваться только одно из элементарных событий $\omega_i \in \Omega$.

Различают элементарные и составные события. Составное событие — это событие, которое можно представить в виде совокупности элементарных событий. Таким образом, составное событие A является некоторым подмножеством пространства Ω элементарных событий.

Пример. Мысленный опыт заключается в подбрасывании монеты. У этого опыта имеется два исхода: выпал орел (событие «О») и выпала решетка (событие «Р»). Каждый из этих исходов представляет собой элементарное событие. Они не могут произойти одновременно. Пространство элементарных событий в данном случае состоит из двух точек (элементарных событий) $\omega_0 =$ «О» и $\omega_1 =$ «Р».

Пример. Мысленный опыт заключается в бросании игральной кости. У этого опыта имеется шесть исходов: $\omega_i =$ «на верхней грани выпало i очков», $i = \overline{1,6}$. Каждый из этих исходов представляет собой элементарное событие. Они не могут произойти одновременно.

Пространство элементарных событий в данном случае состоит из шести точек (элементарных событий). Событие $A =$ «на игральной кости выпало не менее трех очков» является составным и включает в себя элементарные события ω_3, ω_4, ω_5, ω_6: $A = \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6$.

Пространство элементарных событий может содержать как конечное число элементарных событий, так и бесконечное (счетное или несчетное). Множество элементарных событий, мощность которого равна или меньше мощности множества натуральных чисел, называют дискретным пространством элементарных событий.

Начнем с рассмотрения более простого вероятностного описания конечного дискретного пространства элементарных событий.

Пусть $\mathcal{A}$ некоторое множество подмножеств $\mathbf{\Omega}$. Таким образом, элементами $\mathcal{A}$ являются события (составные или элементарные).

Пример. В опыте с подбрасывании монеты включим в $\mathcal{A}$ элементарные события $\omega_0 =$ «O» и $\omega_1 =$ «P». Также логично включить в $\mathcal{A}$ события, образованные комбинацией событий ω_0 и ω_1: их объединение $\omega_0 \cup \omega_1 = \mathbf{\Omega}$ и пересечение $\omega_0 \cap \omega_1 = \emptyset$. Заметим, что поскольку элементарные события являются несовместными, то их пересечение равно пустому множеству. Таким образом, в нашем примере $\mathcal{A} = \{\omega_0, \omega_1, \mathbf{\Omega}, \emptyset\}$.

Все пространство элементарных событий образует достоверное событие, поскольку в ходе опыта обязательно произойдет какое-либо событие из $\mathbf{\Omega}$. Пустое множество трактуют как невозможное событие, так-как оно не может произойти в ходе опыта.

Элементам из множества $\mathcal{A}$ будем сопоставлять числа $p_i \in [0, 1]$, которые назовем вероятностями соответствующих событий. Вероятности событий описывают частоты появления случайных событий при многократном повторении наблюдений (опытов). Достоверному событию приписывают вероятность 1:

$$P\{\mathbf{\Omega}\} = 1,$$

поскольку это событие происходит в каждом опыте, т. е. его частота появления равна 1.

Невозможному событию приписывают вероятность 0:

$$P\{\emptyset\} = 0,$$

поскольку частота его появления равна 0, оно не может произойти ни в одном опыте.

Также потребуем, чтобы вероятность была аддитивной функцией множеств, т. е. если событие A раскладывается в сумму несовместных событий A_i $(i = \overline{1, N})$, т. е. $A = \bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i$, где $A_i \cap A_j = \emptyset$

при $i \neq j$, то

$$P\{\bigcup_{i=1}^{N} A_i\} = \sum_{i=1}^{N} P\{A_i\}.$$

Пример. Для опыта с подбрасывании правильной монеты в силу аддитивности вероятностной меры и $\boldsymbol{\Omega} = \omega_0 \cup \omega_1$ и $\omega_0 \cap \omega_1 = \emptyset$ должно быть

$$P\{\Omega\} = P\{\omega_0\} + P\{\omega_1\} = 1.$$

События ω_0 и ω_1 равновероятны $P\{\omega_0\} = P\{\omega_1\} = p$, поэтому их вероятность $p = 1/2$.

В конечном пространстве элементарных событий множество событий $\mathcal{A}$ является алгеброй множеств, т.е. пересечение $(A_i \cap A_j)$, объединение $A_i \cup A_j$, симметрическая разность $A_i \triangle A_j$ элементов $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ принадлежит $\mathcal{A}$, а вероятность событий $A_i \in \mathcal{A}$ должна удовлетворять следующим аксиомам.

Аксиома 1а. $P\{A\} \geqslant 1$ для любого $A \in \mathcal{A}$.

Аксиома 2а. $P\{\Omega\} = 1$.

Аксиома 3а. Вероятность является аддитивной функцией множеств, т.е. при $A_i \cap A_j = \emptyset$

$$P\{A_i \cup A_j\} = P\{A_i\} + P\{A_j\}.$$

Тройку $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ называют вероятностным пространством в расширенном смысле.

Заметим, что в определении алгебры множеств вместо требования о принадлежности симметрической разности $A_i \triangle A_j$ элементов A_i, A_j к $\mathcal{A}$ можно потребовать, чтобы для любого множества $A \in \mathcal{A}$ алгебре принадлежало и его дополнение: $\bar{A} = \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$.

В случае конечного пространства элементарных событий для построения вероятностного пространства достаточно задать вероятности всех элементарных событий, а в качестве алгебры множеств $\mathcal{A}$ рассматривается множество всех подмножеств пространства элементарных событий Ω.

В случае счетных дискретных пространств элементарных событий уже не всегда можно назначить вероятности непосредственно элементарным событиям.

Приведем два примера: в первом работает схема непосредственного назначения вероятностей элементарным событиям, как в случае конечных пространств элементарных событий, а во втором примере такая схема не срабатывает.

Пример. Рассмотрим в качестве пространства элементарных событий множество, состоящее из элементарных событий ω_i, $i = 1$,

$2, 3, \ldots$, а событие ω_i означает, что выбирается натуральное число i. Пусть $P\{\omega_i\} = 1/2^i$. Нетрудно убедиться, что вероятность всего пространства элементарных событий равна 1:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\{\omega_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (1/2)^i = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = 1.$$

В качестве алгебры множеств $\mathcal{A}$ возьмем множество всех подмножеств пространства элементарных событий $\boldsymbol{\Omega}$.

Вероятность события $A \in \mathcal{A}$ в этом случае равна

$$P\{A\} = P\left\{\{\omega_i | \omega_i \in A\}\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{\omega_i\} I_A(\omega_i),$$

где $I_A(\omega)$ — индикатор множества A,

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in A; \\ 0 & \text{при } \omega \notin A. \end{cases}$$

В приведенном примере вероятность определена для всех подмножеств пространства элементарных событий. Заметим, что поскольку мощность $\boldsymbol{\Omega}$ равна $\aleph_0$, то мощность $\mathcal{A}$ равна $2^{\boldsymbol{\Omega}} = \aleph$ мощности континуума.

В задачах с бесконечным пространством элементарных событий возникает необходимость оперировать с событиями, являющимися комбинацией счетного числа других событий. В связи с этим вместо алгебры множеств $\mathcal{A}$ рассматривают σ-алгебру $\mathcal{F}$ множеств над $\boldsymbol{\Omega}$, обладающую следующими свойствами.

1. $\boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{F}$.

2. Для последовательности $\{A_i\}$ множеств из $\mathcal{F}$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}.$$

3. Для любого $A \in \mathcal{F}$ $\bar{A} \in \mathcal{F}$.

Помимо этого аксиому 3а заменяют требованием счетной аддитивности вероятности:

Аксиома 3. Для последовательности $\{A_i\}$ событий такой, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ выполняется свойство счетной аддитивности вероятности:

$$P\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{A_i\}.$$

Заметим, что требования аксиомы 3 можно заменить требованиями обычной (конечной) аддитивности (аксиома 3) и аксиомы непрерывности [2]:

Аксиома 4. Пусть последовательность A_i событий такова, что $A_{i+1} \subset A_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A \in \mathcal{F}$, тогда $\lim\limits_{i\to\infty} P\{A_i\} = P\{A\}$.

Пример. Рассмотрим в качестве пространства элементарных событий Ω множество, состоящее из элементарных событий ω_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, а событие ω_i означает, что выбирается натуральное число i. В качестве алгебры множеств $\mathcal{F}$ возьмем множество всех подмножеств пространства элементарных событий Ω. Пусть проводится мысленный опыт, в результате которого равновероятно выбирается произвольное натуральное число. Поскольку вероятность всего пространства элементарных событий равна 1, то вероятность каждого из равновероятных событий должна равняться нулю:

$$\lim_{N\to\infty} 1/N = 0.$$

Но в этом случае

$$P\{\Omega\} = P\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i\right\} = 0,$$

т. е. невозможно задать на $\mathcal{F}$ счетно-аддитивную меру [3].

Заметим, что для конечного пространства элементарных событий аксиома непрерывности всегда выполняется. Действительно, пусть имеется система вложенных множеств $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$. Поскольку A_1 — конечное, то имеется конечное число его подмножеств, поэтому среди его вложенных подмножеств A_i найдется наименьшее $A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, $n < \infty$, тогда $\lim\limits_{i\to\infty} P\{A_i\} = P\{A_n\}$.

Тройку $\langle \Omega, \mathcal{F}, P\rangle$ называют вероятностным пространством.

Перейдем теперь к непрерывным пространствам элементарных событий, когда мощность множества Ω равна $\aleph$ (континуум).

Оказывается [2, стр. 169; 4, стр. 80], что если при построении вероятностного пространства с равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$ (в мысленном опыте равновероятно может быть выбрано каждое число из отрезка $[0, 1]$) в качестве σ-алгебры выбрать 2^Ω — множество всех подмножеств пространства, то на такой системе множеств нельзя задать вероятность, обладающую свойством счетной аддитивности. Поэтому при построении $\mathcal{F}$ поступают следующим образом [2]. Назначают вероятности системе полуоткрытых интервалов $[a, b)$ из $[0, 1]$ (как это будет показано ниже, это эквивалентно заданию функции распределения вероятностей). В качестве σ-алгебры $\mathcal{F}$ берут минимальную σ-алгебру, содержащую полуоткрытые интервалы — это борелевская σ-алгебра. При таком подходе все множества (события) борелевской σ-алгебры будут иметь вероятности, образующие счетно-аддитивную вероятностную меру.

Замечание. Пусть $\mathcal{A} = \{A_i\}$ — некоторая система подмножеств из Ω. «Наибольшей» σ-алгеброй, содержащей $\mathcal{A}$, является множество всех подмножеств Ω (включая Σ и $\emptyset$). Пересечение всех σ-алгебр, содержащих $\mathcal{A}$, называют минимальной σ-алгеброй, порожденной $\mathcal{A}$ и обозначают $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$.

Если задано некоторое множество Ω и алгебра или σ-алгебра $\mathcal{F}$ его подмножеств, то пару $\langle \Omega, \mathcal{F} \rangle$ называют измеримым пространством.

Теорема Каратеодори [2] говорит, что если вероятности заданы на какой-либо алгебре $\mathcal{A}$, порождающей минимальную σ-алгебру $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$, т. е. имеется вероятностное пространство в широком смысле $\langle \Omega^{\mathcal{A}}, P \rangle$, то существует, и притом единственная, вероятностная мера Q, определенная на $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$, такая, что $Q(A) = P\{A\}$ для всех $A \in \mathcal{A}$.

Случайной величиной назовем функцию $\xi(\omega)$, определенную на пространстве элементарных событий и принимающую значения из пространства E. Область значений случайной величины может представлять собой, например, пространство действительных чисел $\mathbb{R}$ или какое-либо его подмножество.

Эта функция должна быть измеримой, т. е. прообразом каждого борелевского множества B из области значений случайной величины должно быть борелевское множество из $\mathcal{F}$. Иными словами, если $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$ — σ-алгебры борелевских множеств, $\langle E, \mathcal{B} \rangle$, $\langle \Omega, \mathcal{F} \rangle$ — измеримые пространства, то для любого множества $B \in \mathcal{B}$ при отображении ξ: $\mathcal{F} \to \mathcal{B}$ прообразом $\xi^{-1}(B) = \{\omega | \xi(\omega) \in B\}$ множества B является множество из $\mathcal{F}$.

Такое определение позволяет построить вероятностное пространство $\langle E, \mathcal{B}, Q \rangle$ на основе $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$.

Случайным процессом (СП) $\xi(\omega, t)$ будем называть совокупность случайных величин, зависящих от параметра t (времени). Таким образом, каждому элементарному событию $\omega \in \Omega$ в случае рассмотрения случайных величин ставится в соответствие некоторое число ξ, а при рассмотрении случайного процесса — некоторая функция времени. В дальнейшем будем обозначать случайный процесс $\xi(t)$, подразумевая зависимость от переменной ω.

Один из способов классификации случайных величин и процессов основан на виде их областей определения и значения.

Случайная величина называется непрерывной, если мощность множества элементов ее области значений равна мощности множества действительных чисел.

Случайная величина называется дискретной, если мощность