ВВЕДЕНИЕ

Последнее десятилетие отмечено широким внедрением компьютерных технологий в системы передачи информации. Основу этих технологий составляют цифровые системы передачи сигналов и цифровые методы обработки сигналов. В настоящее время они составляют основу важнейших разработок в области физики, электроники и электротехники, в особенности в системах связи, радиолокации, контрольно-измерительных системах и системах автоматического управления.

Бурное развитие компьютерных технологий обусловлено несколькими причинами: высокая эффективность цифровых методов позволяет лучше обрабатывать и анализировать сигналы; при их применении проявляется большая гибкость и имеется все возрастающая возможность использования высокопроизводительных ЭВМ или быстродействующих специализированных цифровых вычислителей, стоимость которых постоянно снижается.

Основу устройств цифровой обработки сигналов составляют цифровые цепи, широкий класс которых можно отнести к числу колебательных систем дискретного времени. Теория колебаний непрерывных систем изложена в классической монографии А.А. Андронова, А.А. Витта и С.Э. Хайкина, а также в работах С.П. Стрелкова, В.В. Мигулина, В.И. Медведева, Е.Р. Мустель и В.Н. Парыгина. Классическая теория колебаний построена на базе теории дифференциальных уравнений.

Сегодня активно развивается теория колебаний цифровых систем, включающая общие закономерности колебательных процессов в различных динамических системах дискретного времени. Разрабатываются эффективные методы анализа и расчета процессов, изучаются закономерности их протекания в реальных системах с использованием в каждом случае наиболее адекватных методов рассмотрения. При этом многообразие цифровых колебательных систем требует при изучении нахождения общих черт у различных систем и объединения их по наиболее характерным признакам в определенные классы и типы.

Как и аналоговые (непрерывные), цифровые системы можно классифицировать по их параметрам, выделяя системы с параметрами, не зависящими от их состояния (линейные системы с постоянными параметрами, линейные системы с параметрами, зависящими от времени, — параметрические), и с параметрами, зависящими от состояния системы (нелинейные системы), а также по условиям воздействия, разделяя системы на автономные и неавтономные.

Свойства цифровых цепей наиболее полно описаны в классической монографии Л. Рабинера и Л. Гоулда, а также в работах А.В. Оппенгейма, Р.В. Шафера, В. Каппелини, А.Дж. Константинидиса, П. Эмилиани и автора данной книги. Значительные исследования в области нелинейной динамики цифровых систем выполнены А. Дэвисом и М. Огорзалеком.

В настоящем пособии излагается теория рекурсивных цифровых колебательных систем первого и второго порядков, на базе которых, как и в системах непрерывного времени, строится большинство сложных колебательных систем. Большое внимание уделяется одному из главных вопросов теории колебаний — условию устойчивости динамической системы. Рассматриваются линейные и обусловленные переполнением и квантованием нелинейные свободные колебания и колебания при постоянном и гармоническом входных воздействиях.

В первом разделе приводятся математический аппарат, основанный на теории точечных отображений, а также разработанный автором метод анализа вынужденных колебаний в цифровых динамических системах при периодических входных воздействиях. Изложены понятия устойчивости состояний равновесия, устойчивости периодических движений.

Второй раздел посвящен теории динамических систем первого порядка. Рассмотрены свободные колебания при линейной и нелинейной (с двумя видами нелинейности переполнения) характеристиками сумматора, а также вынужденные линейные и нелинейные колебания под действием гармонической внешней силы. Для нелинейных систем излагаются искажения гармонического сигнала и избирательные свойства.

В третьем разделе изложены вопросы теории свободных и вынужденных колебаний в линейной динамической системе второго порядка — цифровом осцилляторе. Показаны траектории движений в автономной системе в сравнении с фазовыми портретами непрерывных систем, определены условия устойчивости, построены бифуркационные диаграммы состояний равновесия автономной системы, приведен анализ частотных свойств и резонансных законов для неавтономных систем.

Четвертый раздел посвящен колебательным процессам в автономных и неавтономных системах второго порядка с двумя видами нелинейности переполнения: с насыщением и пилообразной. Построены бифуркационные диаграммы периодов свободных колебаний, а также приведены фрактальные диаграммы хаотических колебаний в системах с пилообразной нелинейностью. Рассмотрены вынужденные колебания, нелинейные искажения входного сигнала и избирательные свойства при гармоническом воздействии.

В пятом разделе излагается динамика рекурсивных систем с учетом эффектов квантования. Рассмотрены два вида нелинейности квантования. Приведена методика анализа свободных колебаний и колебаний при постоянном входном воздействии в рекурсивной системе первого порядка. Получены выражения для расчета наиболее вероятных колебаний, приведены бифуркационные и вероятностные диаграммы состояний равновесия. Изложены вынужденные колебания, нелинейные искажения входного сигнала и избирательные свойства систем первого и второго порядков при гармоническом воздействии.

Математический аппарат, используемый в учебном пособии, основан на теории разностных уравнений, классической теории колебаний и методе точечных отображений (преобразований).

В основу пособия положен материал лекций, которые в течение многих лет читал автор студентам физического факультета Ярославского университета, обучающихся по направлению «Радиофизика». Он дополняет содержание традиционной дисциплины «Теория колебаний».

Автор признателен профессорам С.И. Баскакову, А.А. Ланнэ, С.А. Кащенко и Н.В. Михееву за творческие дискуссии, конструктивные замечания и рекомендации, оказавшие большую практическую поддержку. Большую помощь при подготовке материала оказали коллеги по кафедре инфокоммуникаций и радиофизики доцент, доктор техн. наук А.Л. Приоров, доцент, канд. техн. наук В.В. Хрящев и заведующий лабораторией Ю.А. Лукашевич. Автор выражает глубокую благодарность Ю.А. Лукашевичу за компьютерный набор рукописи.

Р а з д е л 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

1.1. Основы теории точечных отображений

Метод точечных отображений (преобразований) является одним из эффективных методов изучения динамики сильно нелинейных систем, поведение которых описываются дифференциальными или разностными уравнениями с кусочно-гладкими нелинейностями. Этот метод, зарождение которого связано с именами А. Паункаре и Дж. Биркгофа, был введен в теорию нелинейных колебаний А.А. Андроновым. Установив связь между автоколебаниями и предельными циклами А. Пуанкаре и опираясь на математический аппарат качественной теории дифференциальных уравнений, А.А. Андронов существенно расширил возможности метода «припасовывания» и сформулировал принципы, которые легли в основу метода точечных отображений, что позволило эффективно использовать этот метод при исследовании конкретных систем автоматического регулирования и радиотехники.

1.1.1. Сущность метода точечных отображений

Сущность метода заключается в следующем. Пусть задан отрезок прямой $[a, b]$ и каждой точке x этого отрезка поставлена в соответствие точка $\bar{x}$ этого же отрезка. Такое соответствие называется *точечным отображением* отрезка $[a, b]$ в себя.

Любое точечное отображение может быть задано в виде функции

$$\bar{x} = f(x), \tag{1.1}$$

называемой *функцией последования*, и, наоборот, любая функция определяет некоторое точечное отображение. Точки x и $\bar{x}$ называются соответственно *начальной* и *последующей*, или *точкой-оригиналом* и *точкой-образом*.

Пусть точечное отображение F отрезка $[a, b]$ в себя определяется функцией последования (1.1), причем эта функция и отрезок таковы, что для любого $x \in [a, b]$ существует $f(x) \in [a, b]$. Возьмем на отрезке $[a, b]$ некоторую точку x_0 и найдем ее последующую $x_1 = f(x_0)$. Применив к точке x_1 отображение F, получим точку $x_2 = f(x_1) = f[f(x_0)]$.

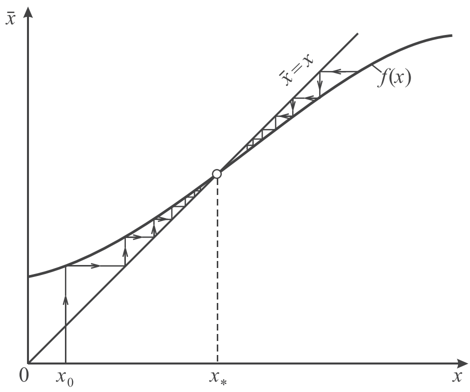

Рис. 1.1. Диаграмма Ламерея

Отображение, переводящее точку x_0 в точку x_2, представляет собой произведение отображения F и F и записывается как степень отображения F (т. е. $F \cdot F = F^2$). Применяя далее отображение F к точке x_2, получим точку $x_3 = f(x_2)$, которая является результатом применения отображения F^3 к точке x_0, причем $x_3 = f\{f[f(x_0)]\}$.

В общем случае этот процесс описывается следующим образом:

$$x_n = f(x_{n-1}). \tag{1.2}$$

Значение x_n называется n-й итерацией начального значения x_0.

Одномерное точечное отображение отрезка прямой имеет наглядную геометрическую интерпретацию в виде *диаграммы Ламерея*, представляющей собой график функции последования $\bar{x} = f(x)$ с нанесенной на нем биссектрисой координатного угла $\bar{x} = x$ (рис. 1.1). Итерационный процесс, порождаемый точечным отображением F, изображается на этой диаграмме *лестницей Ламерея*.

Точка x_* отрезка $[a, b]$, являющаяся корнем уравнения

$$f(x) - x = 0, \tag{1.3}$$

т. е. отображающаяся сама в себя (поскольку $x_* = f(x_*)$), *называется простой неподвижной* (или *инвариантной*) *точкой отображения* F. На диаграмме Ламерея простая неподвижная точка отображения F является абсциссой точки пересечения графика функции последования $f(x)$ с биссектрисой координатного угла $\bar{x} = x$. Как видно из рис. 1.1, неподвижная точка x_* может являться пределом последовательности (1.2).

Неподвижная точка x_* точечного отображения F называется *устойчивой в малом*, если существует хотя бы сколь угодно малая окрестность этой точки, такая что любая последовательность (1.2),

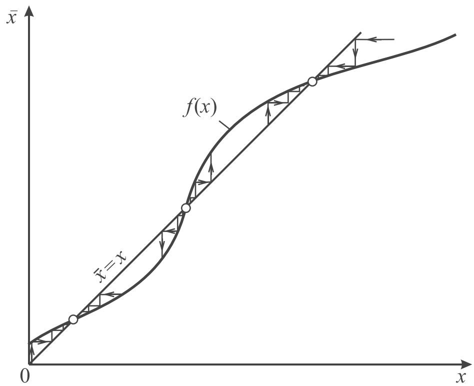

Рис. 1.2. Точечное отображение с двумя устойчивыми и одной неустойчивой простыми неподвижными точками

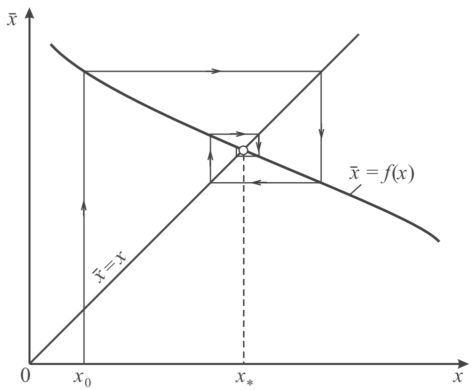

Рис. 1.3. Точечное отображение с устойчивой простой неподвижной точкой

начинающаяся в этой окрестности, сходится к точке x_*. В противном случае неподвижная точка x_* называется *неустойчивой*. На рис. 1.1–1.4 приведены примеры точечных отображений, имеющих устойчивые и неустойчивые простые неподвижные точки.

Условие устойчивости в малом простой неподвижной точки точечного отображения задается *теоремой Кенигса*: неподвижная точка x_* точечного отображения F с функцией последования $f(x)$ устойчива, если в сколь угодно малой окрестности этой точки выполняется условие

$$\left|\frac{df}{dx}\right|_{x=x_*} < 1, \tag{1.3a}$$

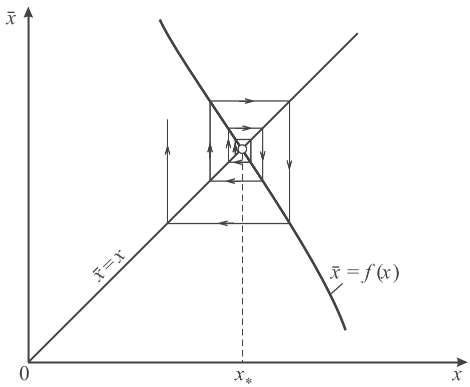

Рис. 1.4. Точечное отображение с неустойчивой простой неподвижной точкой

и неустойчива, если

$$\left|\frac{df}{dx}\right|_{x=x_*} > 1. \tag{1.3б}$$

Следует заметить, что эта теорема не решает вопроса об устойчивости неподвижной точки в критическом случае, когда $|df/dx| = 1$. В этом случае устойчивость определяется знаками старших производных функции последования.

1.1.2. Кратные циклы точечного отображения

Вместе с тем итерационный процесс, порождаемый точечным отображением, может сходиться не только к простой устойчивой неподвижной точке. На рис. 1.5 приведен пример точечного отображения, у которого последовательность итераций сходится к паре точек a_1 и b_1, таких что:

$$f(a_1) = b_1; \quad f(b_1) = a_1.$$

Такое инвариантное многообразие называется *двукратным циклом точечного отображения*, или *циклом периода* $T = 2$, а точки a_1 и b_1 называются *двукратными неподвижными точками точечного отображения* F. Они находятся как корни уравнения

$$f[f(x)] - x = 0. \tag{1.4}$$

Рассмотрим подобные многообразия в общем случае. Если функция последования $f(x)$, заданная на интервале $[a, b]$, и сам интервал $[a, b]$ таковы, что для любого $x \in [a, b]$ имеет место $f(x) \in [a, b]$, то в этом интервале можно построить последовательность следующих итерированных функций:

$$x_0 = f_0(x) = x, \quad x_1 = f_1(x) = f(x), \quad x_2 = f_2(x) = f[f(x)];$$
$$x_3 = f_3(x) = f\{f[f(x)]\}, ..., x_n = f_n(x) = f(x_{n-1}). \tag{1.5}$$

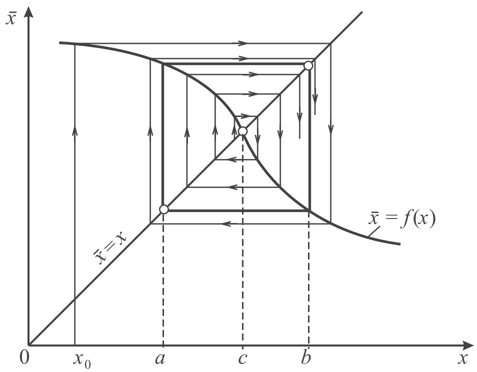

Рис. 1.5. Цикл периода 2

Функция $f_n(x) = f(x_{n-1})$ называется n-й итерацией функции $f(x)$. Для натуральных итераций имеет место следующее основное функциональное уравнение:

$$f_n[f_m(x)] = f_{n+m}(x). \tag{1.6}$$

Пусть N — минимальное число, при котором для некоторой точки x_0 выполняется равенство

$$f_N(x_0) = x_0. \tag{1.7}$$

Тогда точка x_0 называется *N-кратной неподвижной* (или инвариантной) *точкой точечного отображения F*. Применяя к обеим частям равенства (1.7) операцию f, получим, что одновременно с точкой x_0 N-кратными неподвижными будут и точки

$$x_1 = f_1(x_0);\; x_2 = f_2(x_0), ...,\; x_{N-1} = f_{N-1}(x_0). \tag{1.8}$$

Инвариантное множество (1.8) называется *N-кратным циклом точечного отображения F*, или *циклом периода N* и представляет собой совокупность N точек, которые последовательно циклически отображаются одна в другую. На диаграмме Ламерея кратные циклы отображаются лестницей Ламерея в виде замкнутых контуров, состоящих из отрезков вертикальных и горизонтальных прямых (рис. 1.6).

Очевидно, что при выполнении равенства (1.7) имеет место и равенство

$$f_{kN}(x_0) = x_0, \tag{1.9}$$

где k — целое число. Нахождение N-кратных неподвижных точек сводится к нахождению действительных корней уравнения

$$f_N(x) - x = 0, \tag{1.10}$$

называемого *уравнением N-кратных неподвижных точек* или *уравнением периода N*.