Введение

Кореляционные методы находят широкое применение при обработке сигналов в радиотехнике, автоматическом управлении, измерительной технике [1–3].

В данном учебном пособии в отличие от известных отечественных источников [4–6] корреляционные функции (КФ) рассматриваются как смешенные начальные моменты m_{11} порядка $1 + 1$, т. е. КФ $R_x(t_1t_2)$ случайного процесса (СП) $X(t)$ определяется следующим образом:

$$R_x(t_1, t_2) = \mathrm{E}(X_{t_1}X_{t_2}) =$$
$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2W(x_1, x_2)\,dx_1dx_2 & \text{для непрерывных СП;} \\ \displaystyle\sum_i\sum_j x_ix_jP(x_i, x_j) & \text{для дискретных СП,} \end{cases}$$

где $X_{t_i} = X(t_i)$; $i = 1, 2$; $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$; $W(x_1, x_2)$ и $P(x_1, x_2)$ — соответственно плотность распределения вероятностей (ПРВ) и распределение вероятностей случайных величин (СВ) x_1 и x_2.

При этом смешанный центральный момент μ_{11} порядка $1 + 1$ — это ковариационная функция (КВФ) $K_x(t_1t_2)$ СП $X(t)$:

$$K_x(t_1, t_2) = \mathrm{E}[(X_{t_1} - m_{x_1})(X_{t_2} - m_{x_2})].$$

Аналогично определяются и взаимные КФ (ВКФ) и взаимные КВФ.

В данном пособии в основном рассматриваются стационарные СП, для которых выполняются условия

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau); \quad K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau),$$

где $\tau = t_2 - t_1$, причем $\lim\limits_{\tau\to\infty} R_x(\tau) = m_x^2$; $m_x = \mathrm{E}(X)$ — среднее значение СП; $R_x(0) = \sigma_x^2 + m_x^2$; $\sigma_x^2 = \mathrm{E}[(X - m_x)^2]$ — дисперсия СП.

Для стационарных СП справедлива теорема Винера–Хинчина (для непрерывных СП) и теорема Уолда (для дискретных СП) [7].

Теорема Винера–Хинчина состоит из пары преобразований Фурье (ПФ), связывающих КФ $R(\tau)$ и энергетический спектр СП (или спектральную плотность мощности (СПМ) СП) $S(\omega)$:

$$S(\omega) = \mathfrak{F}[R(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,d\tau;$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \mathrm{e}^{i\omega\tau} \, d\tau.$$

Теорема Уолда связывает аналогичные характеристики в случае дискретных СП:

$$S(\overline{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R[n] \mathrm{e}^{-i\overline{\omega}n};$$

$$R[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\overline{\omega}) \mathrm{e}^{i\overline{\omega}n} \, d\overline{\omega},$$

где $\overline{\omega} = \omega T$; T — интервал дискретизации, или в другой форме:

$$S(\overline{\omega}) = R[0] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R[n] \cos n\overline{\omega};$$

$$R[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} S(z) z^{n-1} \, dz.$$

Значения КФ $R(\tau)$ и СПМ $S(\omega)$ позволяют вычислить две интегральные характеристики стационарных СП, а именно время корреляции $\tau_{\text{к}}$ СП и эффективную ширину $\Delta\omega_{\text{э}}$ энергетического спектра (или СПМ) [7]

$$\tau_{\text{к}} = \int_0^{\infty} |\rho(\tau)| \, d\tau,$$

где $\rho(\tau) = R(\tau)/\sigma^2$ — коэффициент корреляции, причем при $\tau > \tau_{\text{к}}$ сечения СП считаются некоррелированными;

$$\Delta\omega_{\text{э}} = \int_0^{\infty} S_H(\omega) \, d\omega; \quad S_H(\omega) = \frac{S(\omega)}{S_{\max}}.$$

Теоретический анализ корреляторов рассмотрен в [5, 8–19]. Практические применения корреляторов в процессах обработки сигналов приводятся в [1–3, 20, 21 и др.]